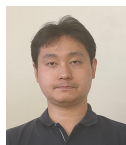


超強結合～深強結合領域における共振器量子電磁力学



設楽智洋

東京医科歯科大学教養部
shitara.las@tmd.ac.jp



越野和樹

東京医科歯科大学教養部
ikuzak.las@tmd.ac.jp

自由空間中の原子は連続的なエネルギー分布をもつ多数の光子モードと「広く浅く」結合している。この状況で原子を励起すると、そのエネルギーは原子から光子へと不可逆的に散逸する（自然放出）。一方、共振器を用いて光子モードを離散化し、原子が単一の光子モードとのみ「狭く深く」結合している状況を作ると、原子と光子の間で可逆なエネルギーのキャッチボールが起こるようになる（真空ラビ振動）。

共振器量子電磁力学（共振器 QED）は、散逸が優勢な前者の状況（弱結合領域）を克服し、量子コヒーレンスが優勢となる後者の状況（強結合領域）、すなわちクリーンな原子-光子結合系を構築する営みであると言える。調和振動子に例えると、摩擦が大きく過減衰を示す状況から、摩擦を抑えて可逆な振動が見えるようにするのと同じである。原子と標的光子モードとの結合（真空ラビ振動数の半分）を g 、原子および共振器の散逸レートをそれぞれ γ , κ で表すと、弱結合領域は $g \lesssim \gamma, \kappa$ 、強結合領域は $g \gtrsim \gamma, \kappa$ で特徴づけられる。

これまでの共振器 QED では、強結合とは言っても結合 g は原子や共振器モードの共鳴周波数 ω_a, ω_c より圧倒的に小さいのが常であった。ところが近年になり、超伝導回路など多様な物理系を用いて共振器 QED 系、つまり（人工）原子と調和振動子の結合系が作製されるようになり、結合 g が共鳴周波数 ω_a, ω_c とコンパラブルになる状況が現れ始めた。慣例として、結合が共鳴周波数のおよそ 1 割を超える状況 ($g \gtrsim \omega_a/10, \omega_c/10$) を超強結合領域、さらには共鳴周波数そのものをを超える状況 ($g \gtrsim \omega_a, \omega_c$) を深強結合領域と呼んでいる。

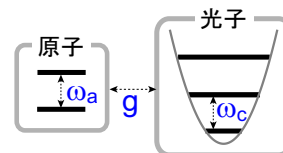
それでは、超～深強結合領域では何が起こるだろうか？理論的には、原子と単一光子モードとの結合系は量子ラビ (Rabi) 模型によって記述され、その相互作用項は「回転項」と「反回転項」から成っている。回転項は「原子が光子を吸収して励起される」「原子が光子を放出して脱励起する」過程を記述するのに対し、反回転項は「原子が光子を放出して励起される」「原子が光子を吸収して脱励起する」という、我々の直感に反する過程を記述する。弱～強結合領域では、反回転項の効果がほとんど無く、それを無視するジェインズ-カミングス (Jaynes-Cummings) 模型によって諸現象が精度よく記述できる。超強結合領域に入ると反回転項の効果が徐々に現れ始め、深強結合領域ではもはや「原子の励起」「光子モードの励起」といった区別さえ曖昧になる。これはちょうど、2つの原子が強く結合して分子を作ると元々の原子からかけ離れた性質を示すのと似ている。

超～深強結合領域において、反回転項のもたらすミステリアスな諸現象を言葉で表現すると、「1個の光子を入射すると3個の光子になって返ってくる」「基底状態において原子と光子に量子もつれが生じ“シュレーディンガーの猫”状態になっている」「基底状態にもかかわらず共振器中に光子が存在する」「共振器中の光子数によって原子の“基底状態”と“励起状態”とが逆転する」といった具合である。深強結合領域は数年前によく実現されたばかりであり、上記の多彩な物理現象を実験で検証し、さらに量子情報処理に活用することが今後期待される。

—用語解説—

共振器量子電磁力学：

原子と共振器中の光子との量子力学的な相互作用や、これらの光学応答を研究する分野。量子コンピュータの構成要素である量子ビットのゲート操作や状態測定には光学応答を利用するため、量子コンピュータのハードウェア理論としての側面をもつ。



真空ラビ振動：

共振器 QED 系において、原子と光子のエネルギーが等しく、かつ両者に緩和が無い場合、系の素励起は原子と光子の間を永遠に振動する。これを真空ラビ振動と呼び、原子-光子結合レート g を真空ラビ振動数の半分で評価する。

回転項・反回転項：

共振器 QED 系における原子-光子相互作用は、原子の下降演算子を $\hat{\sigma}$ 、光子の消滅演算子を \hat{a} として $g(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ で表される。このうち $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}$, $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}$ を回転項、 $\hat{\sigma} \hat{a}$, $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger$ を反回転項と呼ぶ。前者は総励起数を保存するが、後者は保存しない。

1. はじめに：“共振器”なしのQED

量子力学の誕生は20世紀初頭である。誕生当初、量子力学は主として物質中の電子に対して適用され、原子のエネルギースペクトルの定量的理解などに威力を発揮した。量子力学は物質の光学応答、すなわち物質中の電子と電磁場との相互作用を扱うことも勿論可能である。その第一歩は「半古典理論」と呼ばれる、電子を量子力学的に扱う一方で電磁場をc数の古典電磁場として扱う方法であった。半古典理論は光が古典的（コヒーレント状態）である場合に有効であるが、後述するように量子的な光の関わる現象、例えば励起原子の自然放出を記述することができない。こうして物質・電磁場双方を量子力学的に扱う量子電磁力学(QED)の必要性が認識されるようになった。

1.1. 自由空間中の原子

最もシンプルなQED系の例は、自由空間中に二準位原子（基底状態 $|g\rangle$ 、励起状態 $|e\rangle$ ）が孤立している場合であろう。この系のハミルトニアン \hat{H} は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \sum_{\mathbf{k}, p} \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}p} \\ & + \sum_{\mathbf{k}, p} \xi_{\mathbf{k}p} (\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}) (\hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}p}). \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $\hbar = 1$ としてあり、これによりエネルギーと周波数が同じ次元をもつ。第1,2項は原子と光子、第3項は両者の相互作用を表す項であり、 $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$ は原子の下降演算子¹、 $\hat{a}_{\mathbf{k}p}$ は波数 \mathbf{k} 、偏光 $p(=1,2)$ の光子に対する消滅演算子である。自由空間には仮想的に有限長 $L(\sim\infty)$ での周期的境界条件を課し、波数 \mathbf{k} の3成分は $2\pi/L$ の整数倍に離散化されている。 ω_a は原子の共鳴周波数を表し、波数 \mathbf{k} の光子周波数 ω_k と結合定数 $\xi_{\mathbf{k}p}$ は次式で与えられる。

$$\omega_k = c|\mathbf{k}|, \quad (2)$$

$$\xi_{\mathbf{k}p} = \frac{\omega_a(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}p})}{\sqrt{2\varepsilon_0\omega_k L^3}}. \quad (3)$$

ただし、 $\boldsymbol{\mu}$ は原子の遷移双極子モーメント、 $\mathbf{e}_{\mathbf{k}p}$ は当該モードの偏光方向（ \mathbf{k} 方向に z 軸をとったときの x, y 軸方向）を示す単位ベクトルである。

1.2. 自由空間中での自然放出：指数減衰

QEDを用いて励起原子の自然放出を記述してみよう。系全体の基底状態（原子が基底状態 $|g\rangle$ にあり空間中に光子が無い状態）を $|v\rangle$ で表すことにする。初期時刻($t=0$)では原子だけが励起されているから、状態ベクトルは

$$|\psi(0)\rangle = |e, 0\rangle = \hat{\sigma}^\dagger |v\rangle, \quad (4)$$

¹原子のパウリ行列とは $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}_y = i(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger)$, $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} - \hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger$ の関係にある。

と表される。先述の半古典理論は、光子の消滅演算子をその期待値に置き替えたものと等価である。式(4)の状態に対しては $\langle \hat{a}_{\mathbf{k}p} \rangle = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger \rangle = 0$ であり、式(1)中の相互作用項がゼロになってしまう。つまり、半古典理論の枠内では励起原子はその状態に留まり続け、自然放出をおこさない。一方、QEDでは式(1)中の $\hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger \hat{\sigma}$ によって、 $|e, 0\rangle$ は脱励起後の一光子状態

$$|g, \mathbf{k}p\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger |v\rangle, \quad (5)$$

と結合しており、その状態に留まり続けることは無い。時刻 t での状態は $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle$ で与えられる。

自然放出に関与する状態のエネルギー準位構造を図1(a)に示した。仮想的周期 L は非常に大きいため、一光子状態 $|g, \mathbf{k}p\rangle$ のエネルギー分布は連続的と見做せる。また式(3)より、励起原子と一光子状態との結合強度は $L^{-3/2}$ に比例する微小量である。つまり、励起原子 $|e, 0\rangle$ は、エネルギーの異なる多数の一光子状態 $|g, \mathbf{k}p\rangle$ と「広く浅く」結合している。このとき、励起原子の生存確率 $P(t) = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$ は概ね指数関数的に崩壊することが知られており、崩壊レート γ はフェルミ黄金律により $\gamma = \omega_a^3 |\boldsymbol{\mu}|^2 / (3\pi\varepsilon_0 c^3)$ で与えられる。このレートはEinsteinのA係数とも呼ばれ、古くは原子番号や質量数のように個々の原子の性質のみで決まる量であると思われてきたが、次節以降に述べるように電磁場の性質を介して制御可能な量である。

2. 共振器QED

近年、量子計算をはじめとする量子情報処理への興味が高まっており、量子コヒーレンスを長く保つことのできる「きれいな」量子系が模索されている。自由空間中に孤立している原子は一見すると極めてクリーンな量子系のように思えるが、前節でみたように、電磁場がたとえ真空状態にあったとしても、自然放出による緩和が避けられない。それでは自然放出を防ぐにはどうしたら良いだろうか？その答えの一つは、鏡や誘電体で電磁場に境界条件を課し、光子の準位構造を連続的なものから離散的なものに変えてしまうことである。式(2), (3)からわかるように、量子化長 L に対して、光子モードの状態密度は $O(L)$ 、原子と各モードとの結合定数は $O(L^{-3/2})$ の依存性を示す。つま

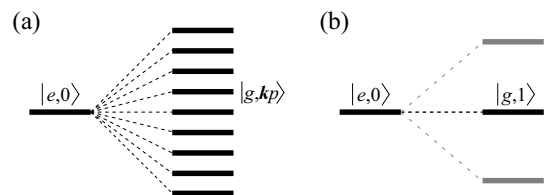


図1 原子-光子結合系のエネルギー図（総励起数=1の部分状態空間内）。 $|e, 0\rangle$ は原子が励起状態にあり光子の無い状態を、 $|g, \mathbf{k}p\rangle$ は原子が基底状態にありモード (\mathbf{k}, p) に一光子がある状態を表す。(a)自由空間中。原子は多数の光子モードと弱く結合している。(b)共振器中。原子は少数のモード（実効的には一個のみ）と強く結合している。

り、原子が共振器など狭い空間に閉じ込められた光子モードと相互作用するとき、図 1(b) のように結合は「狭く深く」なる。

このように、原子と離散化された光子モードとの結合系を共振器 QED 系と呼ぶ¹⁾。共振器 QED は、1980 年代の単一鏡近傍での自然放出レート抑制の観測に端を発し²⁾、それ以来、様々な物理系が原子あるいは共振器として活用され今日に至っている。共振器のタイプとしては、2 枚の鏡を対向させた Fabry-Perot 型にはじまり、微小球³⁾、トロイド⁴⁾、ファイバー^{5, 6)}、フォトニック結晶中の欠陥^{7, 8)} など多様な共振器が開発されている。また原子としては、本物の原子や固体中の色中心^{9, 10)} などの天然素材に加え、半導体量子ドット¹¹⁾ や超伝導量子ビット¹²⁾ などの人工原子も活用可能である。人工原子には、光子との結合を大きくとれる、遷移周波数を人工的にデザイン可能、といった特長がある。また、フォノンやマグノンなどの素励起をボゾンモードとして使う「ハイブリッド量子系」の研究も盛んである^{13, 14, 15)}。

2.1. 量子ラビ模型, ジェインズ-カミングス模型

光子エネルギーの離散化幅が大きく、原子が実効的に共振器中のたった一つのモードとのみ相互作用する状況では、式 (1) のハミルトニアンは量子ラビ (Rabi) 模型と呼ばれる次の形に帰着する：

$$\hat{H}_R = \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (6)$$

ただし、光子のモードは単一なのでラベル (\mathbf{k}, p) を省略し、その固有周波数を ω_c 、原子光子結合の大きさを g と表記した。系の総励起数 \hat{n}_{tot} は

$$\hat{n}_{\text{tot}} = \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (7)$$

と表される。

量子ラビ模型の相互作用項のうち、総励起数を保存しない $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger$ の項を反回転項と呼ぶ。通常の共振器 QED 系 ($g \ll \omega_a, \omega_c$ を満たす、後述の弱～強結合領域) では反回転項の効果が極めて小さいため、これを無視する回転波近似が精度よくなりたち、量子ラビ模型はジェインズ-カミングス (Jaynes-Cummings) 模型と呼ばれる次の形に帰着する：

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}). \quad (8)$$

この模型では総励起数 \hat{n}_{tot} が保存量となっていること、つまり $[\hat{H}_{\text{JC}}, \hat{n}_{\text{tot}}] = 0$ を確認できる。

2.2. 共振器中での自然放出：真空ラビ振動

共振器中での自然放出、つまり状態 $|e, 0\rangle$ [式 (4)] からの時間発展を、ジェインズ-カミングス模型で見よう。総励起数保存のため、時間発展は $\hat{n}_{\text{tot}} = 1$ の部分空間、すなわち状態 $|e, 0\rangle, |g, 1\rangle$ の間でのみおこる。特に原子と共

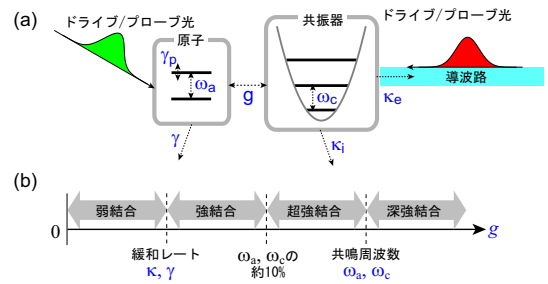


図 2 (a) 共振器 QED 系のパラメータ。 ω_a : 原子の遷移周波数, ω_c : 共振器の遷移周波数, g : 原子-共振器結合, γ : 原子のエネルギー緩和レート, γ_p : 原子の純位相緩和レート, κ_e : 共振器の外部ロスレート (導波路など入出力ポートへの緩和), κ_i : 共振器の内部ロスレート (その他のエネルギー緩和), $\kappa = \kappa_e + \kappa_i$: 共振器の全ロスレート。 (b) 共振器 QED の弱～強～超強～深強結合領域。

振器が共鳴している $\omega_a = \omega_c$ の場合には、時刻 t での状態は (位相因子 $e^{-i\omega_a t}$ を除いて)

$$|\psi(t)\rangle = \cos(gt)|e, 0\rangle - i \sin(gt)|g, 1\rangle \quad (9)$$

で与えられ、原子の励起の生存確率は $P(t) = \cos^2(gt)$ となる。つまり、共振器中では原子と光子との間でエネルギーのキャッチボールがおこり、周期 $T = \pi/g$ のコヒーレントな振動を示す。これを真空ラビ振動と呼ぶ。² これは、自然放出の場合に、原子から光子へと一方向にエネルギーが散逸するのと対照的である。

一方、離調が大きな $|\omega_a - \omega_c|/g \rightarrow \infty$ の極限では、生存確率は 1 に漸近し「自然放出の無い原子」ができあがる。このように離調が大きく $|\omega_a - \omega_c| \gg g$ となっている状況は分散結合領域とよばれており、原子と共振器との実効的な相互作用が対角的³になり量子非破壊測定⁴が可能となるため^{16, 17)}、超伝導量子計算での状態読み出しに活用されている。

2.3. 共振器 QED 系の散逸：弱～強結合領域

前節において、共振器中の励起原子がコヒーレントな振動を起こすことを見たが、これは原子・共振器ともに散逸の無い理想的な場合である。図 2(a) に示すように、現実の共振器 QED 系には原子・共振器双方に様々な散逸チャンネルがあり、散逸が強くなるに従って真空ラビ振動は自然放出へと近づいてゆく。これは丁度、調和振動子において摩擦を大きくすると、非単調な減衰振動から単調な過減衰へと移行するのと同じである。

共振器 QED では、コヒーレントな原子光子結合 g と散逸レート κ, γ とを比較して、結合が優位な $g \gtrsim \kappa, \gamma$ の状況を強結合領域、逆に散逸が優位な $g \lesssim \kappa, \gamma$ の状況を弱結合

²通常のラビ振動 (原子に共鳴光を照射して誘起される基底・励起状態間での振動) と対照的に、真空ラビ振動では光照射が不要である。

³ $\hat{\sigma}_z$ や $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ のような対角行列を介して相互作用することをさす。(6) の相互作用は $\hat{\sigma}_x$ や \hat{a} のような非対角行列を介しており対角的ではない。

⁴ある測定が物理量 \hat{O} の測定に関する確率分布を変えない時、その測定を物理量 \hat{O} の量子非破壊測定という。本文中で言及している量子非破壊測定は $\hat{O} = \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$ の場合に相当する。

領域と呼ぶ。歴史的には、弱結合領域から出発し、散逸を抑えて結合を強くすることにより、1990年代に強結合領域の実現が報告されるようになった。

結合 g を大きくするには幾つかの方法がある。 g は ξ_{kp} [式(3)] の1モード版であるから、大きな遷移双極子 μ をもつ(人工)原子や、小さなモード体積 L^3 の共振器を用いることで g を大きくできる。後述の深強結合を達成した超伝導量子回路の例^{18, 19)} では、ジョセフソン接合による非常に大きなインダクタンスを人工原子と共振器とで共有すること、磁束量子ビットの永久電流を大きくすること、低インピーダンスの共振器を作ることによって電流揺らぎを大きくすることなどにより、結合を大きくしている。また、原子数を増やすことでも g を大きくできる。原子の数を N 個とすると、原子集団はスピン $N/2$ をもつ単一の巨大スピンとして振る舞い、結合 g は \sqrt{N} 倍に増大する。ただし、吸収飽和による非線形性⁵⁾ が消失するため、原子集団はボゾン的に振る舞うようになる。よって式(6)において、 $g \rightarrow \sqrt{N}g$, $\hat{\sigma} \rightarrow \hat{b}$ (ボゾン演算子) の置き換えが必要になる。

3. 超強結合領域

結合 g が更に大きくなると、原子や共振器モードの共鳴周波数 ω_a, ω_c と同程度になってくる。慣習として、結合が共鳴周波数のおよそ1割を超える $g \gtrsim \omega_a/10, \omega_c/10$ の状況を超強結合領域と呼ぶ。⁶⁾ 超強結合領域では、原子光子結合中の反回転項の重要性が増し、ジェインズ-カミングス模型からの逸脱が顕著になる。本節では、超強結合領域での代表的な現象を見てみよう。

3.1. ブロッチ-ジゲルトシフト

2.1節において無視した反回転項は、総励起数が ± 2 だけ異なり、従ってエネルギー差の大きな状態間に結合をもたらす。この結合は状態間のエネルギー差をさらに広げる方向にはたらき、ブロッチ-ジゲルト (Bloch-Siegert) シフトと呼ばれるエネルギーシフトを生じる。具体的には、準位 $|g, n\rangle$ は反回転項 $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger$ を介してエネルギーの $\omega_a + \omega_c$ だけ高い準位 $|e, n+1\rangle$ と結合しており、両者の結合強度は $\langle e, n+1 | g \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger | g, n \rangle = g\sqrt{n+1}$ であるから、2次摂動により $|g, n\rangle$ のエネルギーは $(n+1)g^2/(\omega_a + \omega_c)$ だけ下方にシフトする。同様に、 $|e, n\rangle$ のエネルギーは $|g, n-1\rangle$ との結合により $ng^2/(\omega_a + \omega_c)$ だけ上方にシフトする。状態の元々のエネルギーは $\omega_{a,c}$ のオーダーであり、シフト量は $g^2/\omega_{a,c}$ のオーダーであるため、シフト量は元々のエネルギーに比べて $g^2/\omega_{a,c}^2$ 倍のオーダーであり、超強結合領域では1%を

⁵⁾例えば一個の2準位原子は、光子を2つ同時に吸収できないため(吸収飽和)、原子に照射する光の強度により光学応答が異なる。このような性質を光学非線形性と呼ぶ。

⁶⁾弱～強結合の区別は結合 g と散逸 (κ, γ) との比較で判定され、強～超強～深強結合の区別は g と共鳴周波数 (ω_c, ω_a) との比較で判定されるため、厳密には独立な話である。ただし、通常の系では $\omega_c, \omega_a \gg \kappa, \gamma$ が成り立ち、超強結合であるなら強結合でもあるために、図2(b)のような一次元的な分類が成立する。

を超え、観測できる大きさとなる²⁰⁾。

3.2. 非線形光学過程

弱～強結合領域を精度よく記述するジェインズ-カミングス模型 [式(8)] では系の総励起数が保存されるが、量子ラビ模型 [式(6)] では反回転項により総励起数非保存の状態間遷移が可能となり、これらを介した高次の過程を経て、様々な非線形量子光学過程を決定論的に実現できる可能性を秘めている²¹⁾。このような過程は、高次の遷移を用いるため、通常は有効相互作用が非常に小さいが、超～深強結合領域では、散逸に負けない大きさを得ることが可能となる。

一例として、一つの原子が共振器中の基本モード(周波数 ω_1)に加え三倍波モード(周波数 $\omega_3 \approx 3\omega_1$)にも結合している系を考えよう。このような系は、例えば二倍波モードの節の位置に原子を置き、そのモードとの相互作用を消すことで実現可能である²²⁾。この系のハミルトニアンは、量子ラビ模型の共振器モードを2つに拡張して

$$\hat{H}_R = \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \sum_{j=1,3} \left[\omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + g_j (\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}) (\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j) \right] \quad (10)$$

で与えられ、系の状態は、原子状態 $q (= g, e)$ 、基本および三倍波モードの光子数 $n_1, n_3 (= 0, 1, \dots)$ をラベルとして $|qn_1n_3\rangle$ と表される。

初期状態 $|g01\rangle$ からの状態遷移を考えよう。総励起数保存の条件下では、初期状態は $|e00\rangle$ および $|g10\rangle$ としか結合しないが、反回転項を考慮すると図3のように遷移先が格段に増え、4次の過程で初期状態にほぼ共鳴する $|g30\rangle$ と結合する。両者の有効的結合 g_{eff} は、式(10)のハミルトニアンを数値対角化し $|g01\rangle$ と $|g30\rangle$ の真空ラビ分裂を評価して求めることができるが、およそ $(\text{結合 } g_{1,3})^4 / (\text{遷移周波数 } \omega_{a,1,3})^3$ のオーダーの量になる。

ここまでは量子ラビ模型に基づいた考察で、結合 g の大きさに依らない話であるが、弱～強結合領域では有効的結合が散逸レートより遥かに小さく、効果がかき消されてしまう。一方、超伝導回路による共振器 QED 系(回路 QED 系)では遷移周波数 $\omega_{a,c} \sim 10$ GHz、散逸レート $\kappa, \gamma \sim 10$ MHz が典型値であるが、結合を $g \gtrsim 1$ GHz と大きくとることができる。このとき、有効的結合 g_{eff} が散逸レートを十分に上回り、総励起数の異なる $|g01\rangle - |g30\rangle$ 間の結合を観測することができる。例えば、適切な外部ロスレート $\kappa_e (\sim g_{\text{eff}})$ で導波路を共振器に接続し、そこから周波数 ω_3 の単一光子を入射すると、1に近い高効率で周波数 ω_1 の三光子へと変換されうる²³⁾。

4. 深強結合領域

結合 g が更に大きくなり、原子や共振器モードの共鳴周波数 ω_a, ω_c そのものを超える領域 ($g \gtrsim \omega_a, \omega_c$) を深強結合

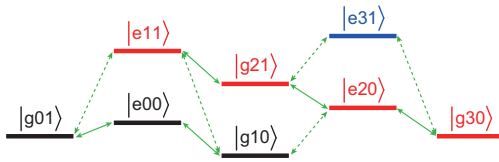


図3 $|g01\rangle$ と $|g30\rangle$ の間の結合. 実線矢印は総励起数保存の過程を, 点線矢印は反回転項による総励起数非保存の過程を表している. また, 総励起数 1, 3, 5 の状態をそれぞれ黒, 赤, 青で表している.

領域と呼ぶ. 超強結合領域では反回転項についての摂動的な取り扱いが可能であったが, 深強結合領域では摂動が破綻し, 異なる扱いが必要になってくる.

こうした非常に強い結合は近年実験的にも実現されるようになっており, 超伝導量子回路によって初めて深強結合領域にある原子-共振器系が実現された^{18, 24, 25}. 物質側の励起としてボゾンのものまで含めると, 量子井戸中の2次元電子とテラヘルツメタマテリアルの結合²⁶, 金ナノ粒子結晶中のプラズモンと自由空間中の光子の結合²⁷ などでも実現されている.

4.1. 2つの断熱極限

ジェインズ-カミングス模型については, 総励起数保存のため, たやすく固有状態・固有エネルギーの解析解を得ることができる. 一方, 量子ラビ模型についても解析解の存在が知られているが, 合流型ホイン (Heun) 関数と呼ばれる特殊関数を用いた複雑な形で与えられる²⁸. そのため現実的には, より物理的に見通しの良い近似的な固有状態が有用である. 本節では, 超~深強結合領域にある量子ラビ模型の低エネルギー固有状態がどのように記述できるか, 2通りの極限的な状況について見てみよう.

4.1.1. 原子の断熱極限: シュレディンガーの猫状態

はじめに, 原子のエネルギー ω_a が非常に小さい場合 ($\omega_a \ll \omega_c, g$) を考えよう. この時, 量子ラビ模型中の原子エネルギー項 $\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$ を摂動的に扱える. 非摂動ハミルトニアン [式 (6) において $\omega_a = 0$ としたもの] は, 次の形に書き換えられる:

$$\hat{H}_R'' = |+\rangle \langle +| \otimes \omega_c (\hat{a}^\dagger + \alpha^*) (\hat{a} + \alpha) + |-\rangle \langle -| \otimes \omega_c (\hat{a}^\dagger - \alpha^*) (\hat{a} - \alpha) + \text{const.} \quad (11)$$

ただし, $|\pm\rangle = (|g\rangle \pm |e\rangle)/\sqrt{2}$ は原子のパウリ演算子 $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}$ の固有値 ± 1 に対応する固有状態であり, $\alpha = g/\omega_c$ は無次元数である. この式は, 図4のように, 共振器モードが原子状態 $|\pm\rangle$ に応じて逆向き of 力を受けて $\mp\alpha$ だけ変位していることを意味している. そのため, $|+\rangle \hat{D}(-\alpha)|n\rangle$ と $|-\rangle \hat{D}(\alpha)|n\rangle$ が縮退したエネルギー $n\omega_c - g^2/\omega_c$ をもつ固有状態となっている. ただし, $|n\rangle$ は共振器モードの数状態であり, $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$ は変位演算子である.

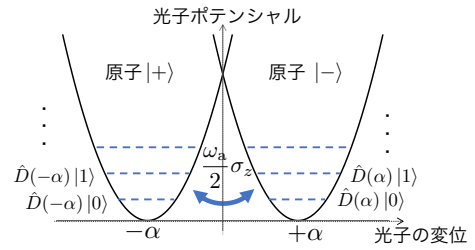


図4 量子ラビ模型の原子断熱極限におけるイメージ図. 原子の状態 $|\pm\rangle$ に応じて, 光子はそれぞれ $\mp\alpha$ を中心とした調和振動子となる. 原子のエネルギー項 $\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$ により両者は弱く結合している.

原子のエネルギー項を摂動的に取り込むと縮退が解け, 固有状態と固有エネルギーは ω_a の最低次でそれぞれ

$$|\phi_n^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle \hat{D}(-\alpha)|n\rangle \pm |-\rangle \hat{D}(\alpha)|n\rangle \right) \quad (12)$$

$$E_n^{(\pm)} = n\omega_c \pm \frac{e^{-2\alpha^2} L_n(4\alpha^2)}{2} \omega_a \quad (13)$$

となる. ただし, $L_n(x)$ は n 次のラゲール多項式で, 逆方向に変位された2つのコヒーレント状態 $\hat{D}(-\alpha)|n\rangle$ と $\hat{D}(\alpha)|n\rangle$ の重なりに由来する.

基底状態 $|\phi_0^{(-)}\rangle$ は, 共振器モードのコヒーレント状態 $|\pm\alpha\rangle$ を用いて, $|\phi_0^{(-)}\rangle = (|+\rangle - |\alpha\rangle - |-\rangle + |\alpha\rangle)/\sqrt{2}$ と表される. この状態は「シュレディンガーの猫」状態と呼ばれる原子と光子のもつれ合った状態である.⁷ つまり, 深強結合領域にある共振器 QED 系では, (自然に準備されると考えられる) 基底状態において, (量子情報処理に有用と考えられる) 量子もつれが生じているのである. また, 基底状態での光子数期待値は $\langle \phi_0^{(-)} | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \phi_0^{(-)} \rangle = |\alpha|^2$ となり, ゼロでない値をもつ. つまり, 基底状態であるにも関わらず共振器中には光子が存在していると言える. この光子は仮想光子と呼ばれている.⁸

相互作用の弱い極限 $g \rightarrow 0$ では $\hat{D}(\pm\alpha) \rightarrow \hat{I}$ (恒等演算子) となるから, 近似的固有状態 $|\phi_n^{(+)}\rangle, |\phi_n^{(-)}\rangle$ はそれぞれ状態 $|e\rangle|n\rangle, |g\rangle|n\rangle$ に接続している. よって, $|\phi_n^{(\pm)}\rangle$ に含まれる符号 $-(+)$ は, 原子の基底 (励起) 状態と対応付けることができる. それらの固有エネルギー [式 (13)] に着目すると, 原子のエネルギーが $\omega_a \rightarrow e^{-2\alpha^2} L_n(4\alpha^2) \omega_a$ のようにくりこまれることが分かる. $n \geq 1$ ではラゲール多項式が負の値を取りうることから, 相互作用 g の大きさによっては図5に示すように, 「共振器光子数 n に依存して,

⁷ 本来のシュレディンガーの猫は, 微視的物体 (放射性原子) と巨視的物体 (猫) との量子もつれ状態であり, 平均光子数 $|\alpha|^2$ が 1 と比べて非常に大きい場合に相当する. これまで実現された系では $|\alpha|^2$ はたかだか数光子程度だが, この場合も「シュレディンガーの (子) 猫状態」という用語を援用する. また量子光学では, 他の自由度との量子もつれの無い $|\alpha\rangle + |\alpha\rangle$ のような状態も, 「シュレディンガーの猫状態」と呼ばれる.

⁸ 通常の「共振器内に光子がある状態」は, ばね振り子に例えると固有振動数 ω_c で振動している状態に相当する. 一方, ここで紹介した「仮想光子がある状態」は, ばね振り子が一定の外力を受けて静止している場合に相当する.

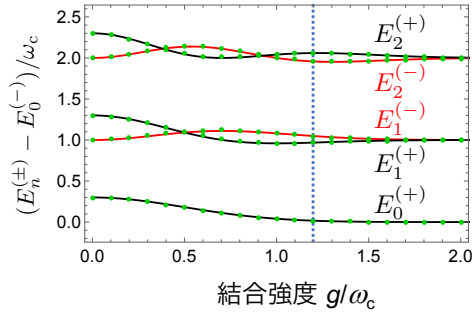


図5 量子ラビ模型の固有エネルギーの g 依存性 ($\omega_a/\omega_c = 0.3$). 基底状態エネルギー $E_0^{(-)}$ を基準とした. 緑点は数値対角化の結果, 黒や赤の実線は近似的表式 (13) を表す. $g/\omega_c = 1.2$ と選ぶと (図中の垂直点線), $E_0^{(-)} < E_0^{(+)}$, $E_1^{(-)} > E_1^{(+)}$, $E_2^{(-)} < E_2^{(+)}$ となっており, 光子数に応じた原子の基底/励起状態の反転が起きている.

原子の基底状態と励起状態が入れ替わる」という状況が生じ, 実験でも確認されている²⁵⁾.

また, 深強結合領域では, 原子のエネルギーは, このくりこみにより指数関数的に小さくなるため, 必ずしも ω_a そのものが非常に小さくなくとも, 近似的表式は有効となることが知られている. 図5は, 量子ラビ模型の固有エネルギーを, 数値対角化による結果と近似的表式 (13) とで比較したものであり, $\omega_a/\omega_c = 0.3$ と非常に小さいとは言えないにもかかわらず, 両者はよく一致している.

4.1.2. 共振器の断熱極限：超放射相転移

今度は, 原子のエネルギー ω_a が非常に大きい場合 ($\omega_a \gg \omega_c, g$) を考えよう. この時, 原子のエネルギーが支配的なため, 低エネルギーの物理は原子の基底状態 $|g\rangle$ で張られる空間に射影した共振器のハミルトニアンで記述される. ただし, 原子-共振器間結合 $g(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ のために, $|g\rangle$ の部分空間と $|e\rangle$ の部分空間の間に相互作用が存在する. この効果を摂動的に取り入れるために, ユニタリー演算子

$$\hat{U} = \exp[-(g/\omega_a)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma})] \quad (14)$$

を用いて, 量子ラビハミルトニアンを $\hat{H}_R \rightarrow \hat{U}\hat{H}_R\hat{U}^\dagger$ のように変換すると, ハミルトニアンから g/ω_a の一次の項を消すことができる. このような変換を Schrieffer-Wolff 変換と呼ぶ. これにより, $|g\rangle$ の部分空間と $|e\rangle$ の部分空間の間の相互作用が $O(g/\omega_a)$ で消え, ハミルトニアンをブロック対角にできる. 最後に, ハミルトニアンを $|g\rangle$ に射影することにより, 共振器の通常相における有効ハミルトニアン

$$\hat{H}_{\text{np}} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{\omega_c \lambda^2}{4} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 \quad (15)$$

を得る. ただし, $\lambda = 2g/\sqrt{\omega_a \omega_c}$ は無次元化された原子-共振器結合である.

得られた有効ハミルトニアン (15) は, 新たなボゾン演算子 $\hat{b} = \hat{a} \cosh x + \hat{a}^\dagger \sinh x$ [ただし $x = \log(1 - \lambda^2)/4$] を

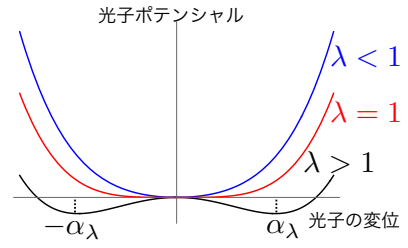


図6 超放射相転移におけるポテンシャルの形状. 通常相 ($\lambda < 1$) では原点 $\alpha = 0$ を中心とした調和振動子で記述できる. 超放射相 ($\lambda > 1$) では, 原点周りで上に凸になり, $\alpha = \pm \alpha_\lambda$ を底とした2つのコヒーレント状態が縮退する.

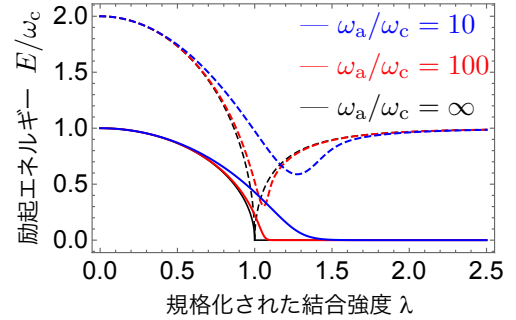


図7 共振器断熱極限での第一 (実線) および第二 (点線) 励起状態のエネルギー. 基底状態を基準とした. $\omega_a/\omega_c = 10$ (赤), $\omega_a/\omega_c = 100$ (青), $\omega_a/\omega_c = \infty$ の極限での解析解 (黒). $\omega_a = \infty$ では, 通常相 ($\lambda < 1$) で非ゼロだった第一励起エネルギーが, 超放射相 ($\lambda > 1$) では0になり, 縮退する. そのため, 超放射相では第2励起エネルギーが素励起に対応する.

導入すると, $\hat{H}_{\text{np}} = \omega_c \sqrt{1 - \lambda^2} \hat{b}^\dagger \hat{b}$ のように対角化できる (ボゴリューボフ変換). 励起エネルギーは $\lambda = 1$ で0になり, 超放射相転移と呼ばれる2次の量子相転移を起し, 系の持つパリティ対称性 ($\hat{\Pi} = \exp[i\pi(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma})]$) が破れる (図6).

超放射相 $\lambda > 1$ では, 励起エネルギーが負になるため, 式 (15) による記述は破綻し,

$$\pm \alpha_\lambda = \pm \sqrt{\frac{(\lambda^4 - 1)\omega_a}{4\lambda^2 \omega_c}} \quad (16)$$

だけ原点から離れた2つのコヒーレント状態が縮退する. この場合にも, $\alpha = \pm \alpha_\lambda$ まわりで展開してからさきほどと類似の手続きで有効ハミルトニアンを得ることができ²⁹⁾, その励起エネルギーは $\omega_c \sqrt{1 - \lambda^{-2}}$ となる (図7).

このように, 量子ラビ模型を用いると, 構成要素が有限個しかないにもかかわらず, $\omega_a \rightarrow \infty$ の極限を考えることで, 超放射相転移を議論することができる. さらに, ω_a が非ゼロである場合にも, ω_c/ω_a の高次の補正を取り入れることで, 有限サイズスケールに相当する議論ができる²⁹⁾. ごく最近, このような少数系における超放射相転移を捉える実験が報告された^{30, 31)}.

5. 散逸の影響

現実の系は完全な孤立系ではあり得ず、外界と相互作用し散逸を受けながら時間発展する開放系である。本節では、超～深強結合領域の共振器 QED 系に対する散逸の影響を見てみよう。この領域では、開放系の取り扱いにも従来と異なった注意が必要になる。

5.1. 弱散逸の場合

まずはじめに、共振器 QED 系が環境と弱く相互作用している状況を考える。この時、系との結合により環境が影響を受けず、また、系の時間発展が過去の履歴によらないとするボルン-マルコフ近似が成り立ち、系の時間発展は次のマスター方程式に従う：

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \mathcal{L}\hat{\rho}. \quad (17)$$

右辺の第一項がハミルトニアンによるユニタリーな時間発展、第二項が環境との相互作用による散逸を表す。通常の状態（弱～強結合領域かつ弱散逸）では、散逸は原子および光子に対し独立に作用する形、すなわち

$$\mathcal{L}_{\text{st}} = \kappa D[\hat{a}] + \gamma D[\hat{\sigma}] + \frac{\gamma\phi}{2} D[\hat{\sigma}_z]. \quad (18)$$

で与えられる。ただし、超演算子 $D[\hat{O}]$ は $D[\hat{O}]\hat{\rho} = \hat{O}\hat{\rho}\hat{O}^\dagger - (\hat{\rho}\hat{O}^\dagger\hat{O} + \hat{O}^\dagger\hat{O}\hat{\rho})/2$ のように密度演算子 $\hat{\rho}$ に作用し、 $D[\hat{\sigma}]$ および $D[\hat{a}]$ は原子および光子のエネルギー緩和を、 $D[\hat{\sigma}_z]$ は原子の位相緩和を表す [図 2(a)]。

しかし、この形の散逸は、共振器 QED の弱～強結合領域でのみ正しく、超～深強結合領域においては修正を加える必要がある。というのも、超～深強結合領域における基底状態は、4.1.1 節で議論しているように、原子と光子がエンタングルした状態であり、また、非ゼロ個の仮想光子が存在している。にもかかわらず、式 (18) で記述される散逸は、状態を原子と共振器それぞれの真空状態 $|g\rangle|0\rangle$ へと駆動してしまう。実際、ゼロ温度の環境と接している場合のマスター方程式を解くと、非物理的な励起や光子を誘起してしまう³²⁾。

このような非物理的な励起を起こしてしまう理由は、深強結合領域においては固有状態が原子や光子の裸の固有状態 ($|g\rangle, |e\rangle$ や $|n\rangle$) からかけ離れていることにある。そのため、裸の固有状態の基底でエネルギーを下げるような散逸ではなく、原子と光子の相互作用を含めた固有状態、すなわち着衣状態を基底として散逸を導入する必要がある^{33, 32)}。具体的には、系のハミルトニアン \hat{H} の固有状態 $|j\rangle$ ($\hat{H}|j\rangle = \omega_j|j\rangle$) を用いて散逸は以下のように書くことができる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{dr}} = D & \left[\sum_j \Phi_j |j\rangle \langle j| \right] + \sum_{j,k(j \neq k)} \Gamma_\phi^{jk} D[|j\rangle \langle k|] \\ & + \sum_{j,k(k > j)} (\Gamma_\kappa^{jk} + \Gamma_\gamma^{jk}) D[|j\rangle \langle k|]. \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、散逸中の各係数は

$$\Phi_j = \sqrt{\gamma_\phi(0)/2} \langle j|\hat{\sigma}_z|j\rangle, \quad (20)$$

$$\Gamma_\phi^{jk} = \gamma_\phi(\Delta_{kj}) |\langle j|\hat{\sigma}_z|k\rangle|^2/2, \quad (21)$$

$$\Gamma_\kappa^{jk} = \kappa(\Delta_{kj}) |\langle j|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|k\rangle|^2, \quad (22)$$

$$\Gamma_\gamma^{jk} = \gamma(\Delta_{kj}) |\langle j|(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})|k\rangle|^2, \quad (23)$$

であり、 $\Delta_{kj} = \omega_k - \omega_j$ は遷移周波数、 $\gamma_\phi(\omega), \kappa(\omega), \gamma(\omega)$ はそれぞれ周波数 ω における位相緩和レート、共振器のエネルギー緩和レート、原子のエネルギー緩和レートを表す。この着衣状態マスター方程式を用いて環境がゼロ温度である場合の定常状態を計算すると、結合 g の大きさに関わらず、共振器 QED 系の基底状態と非常によく一致する。

5.2. 強散逸の場合

一方、環境との相互作用が大きく、ボルン-マルコフ近似が成立しない場合には、系と環境との相関（エンタングルメント）により、ゼロ温度であっても系の基底状態は実現されない。これを見るために、共振器（光子）が導波路などの環境自由度と結合している場合について、環境をあらわに取り入れた全系のハミルトニアン

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H}_R + \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sum_k \xi_k (\hat{a}^\dagger \pm \hat{a})(\hat{b}_k^\dagger \pm \hat{b}_k) \quad (24)$$

を考えてみる。ここで右辺第二項が環境を表すボゾンモード、第三項が系と環境の相互作用を表す。また、相互作用項中の \pm は複号同順であり、共振器-環境間の結合方法（超伝導回路の例では、誘導的または容量的）に対応する。全系の基底状態 $|\psi_{\text{GS}}\rangle$ から環境をトレースアウトして得られる、系の密度行列 $\hat{\rho}_{\text{sys}} = \text{Tr}_E[|\psi_{\text{GS}}\rangle \langle \psi_{\text{GS}}|]$ を考えよう。4.1.1 節で深強結合領域では原子と光子に量子もつれが生じていることを見たが、開放系では環境自由度にまで量子もつれが広がるため、得られる系の密度行列は一般に混合状態になる。特に、深強結合領域では第一励起エネルギーが結合 g に応じて指数関数的に小さくなるため、 $\hat{\rho}_{\text{sys}}$ は \hat{H}_R の基底状態 $|\phi_0^{(-)}\rangle$ だけでなく、第一励起状態 $|\phi_0^{(+)}\rangle$ も同程度含むようになり、基底状態がもっていた原子-共振器間の量子もつれは容易に失われてしまう³⁴⁾。また、この第一励起状態の割合は遷移行列要素

$$|\langle \phi_0^{(-)} | (\hat{a} \pm \hat{a}^\dagger) | \phi_0^{(+)} \rangle|^2 = \begin{cases} 4g^2/\omega_c^2 \\ 0 \end{cases} \quad (25)$$

に比例するため、系の安定性は、共振器が環境とどのような位相の直行位相振幅演算子を介して結合しているか（物理的には結合が電氣的/磁氣的か）に強く依存する。この事実は、量子ラビ模型 \hat{H}_R 及びその固有状態が、ゲージ変換 $\hat{a} \rightarrow e^{i\theta}\hat{a}$, $\hat{\sigma} \rightarrow e^{i\theta}\hat{\sigma}$ に対して不変でないことを反映している。量子ラビ模型の弱～強結合における有効模型であるジェインズ-カミングス模型ではゲージ不変性を持つことを

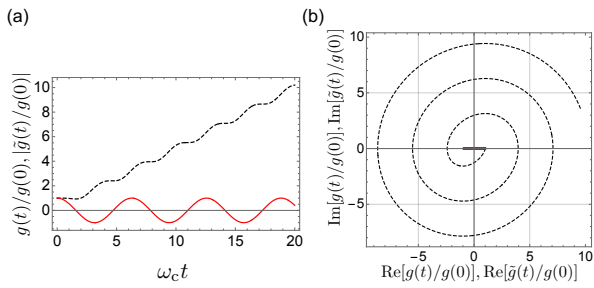


図8 猫状態振幅のパラメトリック増幅。(a) 結合 $g(t)$ (実線, 赤) および振幅の大きさ $|g(t)|$ (破線, 黒) の時間発展。(b) 結合 $g(t)$ および振幅 $|g(t)|$ の位相空間上での軌跡。 $t = 0$ から $t = 20/\omega_c$ まで。

踏まえると、このような結合方法に対する敏感性は深強結合領域特有の現象であると言えよう。

6. 量子情報処理への応用

ここまで超～深強結合系の物理を概観してきたが、以下では量子情報処理への応用に関するいくつかの理論提案を紹介する。

6.1. 状態準備

結合 g の大きさを時間的に変調させることにより、エンタングルした猫状態を生成し、その変位振幅を増幅することができる³⁵⁾。猫状態では、変位振幅が大きいほど重ね合わされた2状態は巨視的に異なり、非古典性が大きく、量子情報処理において有用となる。

ここでは断熱原子極限 (4.1.1 節) を考える。この時、系の固有状態は式 (12) で与えられる。系の初期状態をこれらの固有状態のいずれか $|\psi(0)\rangle = |\phi_n^{\pm}\rangle$ とし、結合に時間的変調を与えつつ [式 (6) において $g \rightarrow g(t)$] 時間発展させる。すると、各時刻での状態は変位振幅のみが変化し、状態ベクトル全体にかかる位相因子を除いて

$$|\psi(t)\rangle = \frac{|+\rangle \hat{D}(-\tilde{g}(t)/\omega_c) |n\rangle \pm |-\rangle \hat{D}(\tilde{g}(t)/\omega_c) |n\rangle}{\sqrt{2}} \quad (26)$$

となる。ただし、変位振幅を決定するパラメータ $\tilde{g}(t)$ は、

$$\frac{d}{dt} \tilde{g}(t) = i\omega_c(g(t) - \tilde{g}(t)) \quad (27)$$

に従って成長する。そこで、例えば $g(t) = g(0) \cos \omega_c t$ のように結合に共振器周波数 ω_c でのパラメトリックな変調を加えると、猫状態の変位振幅を増幅させることができる (図8)。

6.2. 長寿命量子ビット

深強結合領域においては、式 (12), (13) のように、基底状態と第一励起状態である $|\phi_0^{\pm}\rangle$ が指数関数的に小さいエネルギー領域にほぼ縮退する。一方で、第二以上の励起状態はエネルギー的に少なくとも ω_c 程度は離れているため、 $|\phi_0^{\pm}\rangle$ の2状態を量子ビットとして利用できる可能性が指摘されている^{36, 37)}。

この量子ビットにおいては、いくつかの散逸チャンネルが著しく抑制される。5.1節でみたように、散逸チャンネル \hat{O} によるエネルギー緩和レートの大きさは行列要素 $|\langle \phi_0^- | \hat{O} | \phi_0^+ \rangle|^2$ に比例するが³⁾、チャンネル $\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z, i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ に対してはそれぞれ

$$|\langle \phi_0^- | \hat{\sigma}_y | \phi_0^+ \rangle|^2 = |\langle \phi_0^- | \hat{\sigma}_z | \phi_0^+ \rangle|^2 = |(-\alpha | \alpha)|^2 = e^{-4\alpha^2} \quad (28)$$

$$|\langle \phi_0^- | i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) | \phi_0^+ \rangle|^2 = 0 \quad (29)$$

となり、指数関数的に小さく、あるいは0に抑えられる。他のチャンネルの散逸は必ずしも小さくならないが、上述のチャンネルによる散逸が支配的である場合には、量子ビットの寿命は深強結合領域において飛躍的に向上することが期待される。

実際、フラクソニウムとよばれるタイプの超伝導量子ビットでは、支配的なノイズは $\hat{\sigma}_z$ であることが知られている³⁸⁾。エネルギー緩和だけに限らず位相緩和も含めて考慮しても、ダイナミカルデカップリング⁹⁾を併せて利用することにより、長寿命の量子ビットを形成することができると提案されている³⁷⁾。

6.3. 超高速量子操作

超強結合を利用した、非常に高速な2量子ビットゲートが提案されている⁴¹⁾。1つの共振器モードに2つの原子 (量子ビット) が縦結合し¹⁰⁾ その結合定数が可変であるとする：

$$\hat{H} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1,2} \left[\omega_j \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_j + g_j(t) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{\sigma}_{z,j} \right]. \quad (30)$$

ただし $\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_{z,j}$ は原子 j の下降演算子およびパウリ行列であり、 ω_j は共鳴周波数である。このような系において、結合を交互に2回オン・オフする次のプロトコルを考える：

$$(g_1(t), g_2(t)) = \begin{cases} (g_1, 0) & (0 \leq t \leq t_1), \\ (0, g_2) & (t_1 \leq t \leq \pi/\omega_c), \\ (g_1, 0) & (\pi/\omega_c \leq t \leq \pi/\omega_c + t_1), \\ (0, g_2) & (\pi/\omega_c + t_1 \leq t \leq 2\pi/\omega_c). \end{cases} \quad (31)$$

この時、2原子の時間発展を表すユニタリ演算子は、

$$\hat{U} \propto \exp \left[\frac{4i g_1 g_2 \sin(\omega_c t_1)}{\omega_c^2} \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_z^{(2)} \right] \times (\text{local unitary}) \quad (32)$$

となり、制御位相ゲートとして作用する。ただし、local unitary は個々の原子に作用する時間発展演算子であり、 ω_j 依

⁹⁾多数のパルスを打つことにより環境からのノイズを平均化し、取り除く手法^{39, 40)}。取り除くべきノイズの種類が少なければ、少ない数のパルスで実現できる。

¹⁰⁾式 (6) のように $\hat{\sigma}_x$ や $\hat{\sigma}_y$ を介した非対角的な結合を横結合、 $\hat{\sigma}_z$ を介した対角的な結合を縦結合と呼ぶ。

存性はここに含まれる。このプロトコルにより、超強結合領域では、ナノ秒オーダーの高速で制御位相ゲートを実現でき、また、散逸の影響が短時間で済むために最大 99.6% 程度の忠実度を達成できると提案されている。

6.4. 量子メトロロジー

量子メトロロジー（量子計測）は、状態の重ね合わせや量子もつれなどの量子系特有の性質を利用して、古典系では実現できないような測定精度を実現する研究分野である^{42, 43}。深強結合系を用いると、4.1 節で議論したように、非古典的な状態を低エネルギー状態として自然に準備できるため、量子メトロロジーに利用できる。以下では、共振器断熱極限（4.1.2 節）での量子臨界点を利用する方法、原子断熱極限（4.1.1 節）での基底状態であるシュレディンガーの猫状態を利用する方法を紹介する。

6.4.1. 量子臨界点を用いる方法

量子臨界点近傍において感受率が発散し、僅かなパラメータ変化に対して状態が大きく変化することを利用して、高精度にパラメータ推定を行う方法が提案されている。このような量子臨界点を利用した量子メトロロジーは主にスピン系で議論されてきたが^{44, 45}、近年、共振器 QED 系の深強結合領域で生じる超放射相転移も量子メトロロジーに利用できることが指摘されている。スピン系では、相転移を実現するために熱力学極限（スピン数 $N \rightarrow \infty$ ）が必要であるが、深強結合系における超放射相転移の場合には、有限個の要素、たとえば 1 つの原子と 1 つの共振器モードだけを用いても、熱力学極限の代わりにエネルギースケールの分離 $\omega_a/\omega_c \rightarrow \infty$ さえできれば相転移を実現できるというメリットがある。

このような量子臨界系を用意し、ハミルトニアンに含まれるパラメータ（例えば ω_a, ω_c など）を測定・推定する方法は大きく分けて 2 つに分類できる。(i) まず自明な基底状態 ($\lambda = 0$) を用意し、断熱的に λ を増やして臨界点 ($\lambda \sim 1$) に近づけ、この状態を使って測定する⁴⁶。(ii) 有限時間の間にハミルトニアンのパラメータをクエンチして状態を変化させ、得られた状態を使って測定する⁴⁷。

(i) の場合には、臨界点近傍ではエネルギーギャップが閉じるために、基底状態を用意するために必要な時間も発散してしまうことに注意が必要であるが、状態準備にかかる時間を考慮しても、古典系を上回る推定精度、特に量子系の限界である Heisenberg 限界を達成できる。また、(i)、(ii) いずれの場合も、その精度を実現するためには、直交位相振幅のホモダイン測定を行えば十分であり、深強結合系を用意することさえできれば比較的容易に量子メトロロジーを行えることが示されている。

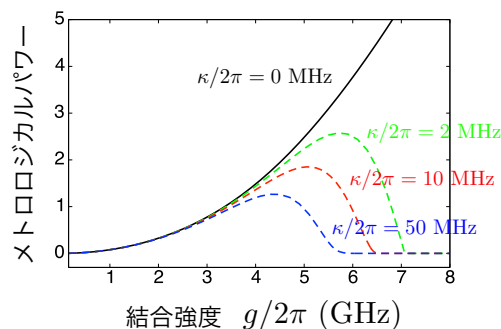


図9 メトロジカルパワー⁴⁸)の結合強度依存性。散逸が非ゼロの場合には、ほどよい大きさの g でメトロジカルパワーは最大化され、それ以上 g を大きくしてもかえって量子性を失い、有用性を損なってしまう。 $\omega_c/(2\pi) = 6$ GHz, $\omega_a/(2\pi) = 1.2$ GHz。

6.4.2. シュレディンガーの猫状態を用いる方法

続いて、シュレディンガーの猫状態を量子メトロロジーに利用することを考えよう。ここでは、与えられた初期状態に対し、物理量 \hat{A} を生成子として、未知パラメータ θ を含む変換 $e^{-i\theta\hat{A}}$ を施し、変換後の状態が $\hat{\rho}_\theta = e^{-i\theta\hat{A}}\hat{\rho}e^{i\theta\hat{A}}$ のようになったとする。この状態 $\hat{\rho}_\theta$ から未知パラメータ θ をどれだけの精度で推定できるであろうか。 N 個の状態を用意し、それぞれに独立に測定を行った場合、精度の限界は次のクラメル・ラオ (Cramér-Rao) 不等式で与えられることが知られている：

$$\Delta\theta \geq \frac{1}{\sqrt{NJ_\theta^Q}}. \quad (33)$$

ただし、

$$J_\theta^Q = 2 \sum_{n,m} \frac{(p_n - p_m)^2}{p_n + p_m} |\langle m|A|n \rangle|^2 \quad (34)$$

は量子フィッシャー (Fisher) 情報量であり、 $\rho_\theta = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$ のようにスペクトル分解されているとする。初期状態としてシュレディンガーの猫状態を準備し、生成子として直交位相振幅演算子 $\hat{p} = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/(\sqrt{2}i)$ を選ぶと、 g/ω_c の大きい領域で $J_\theta^Q \sim g^2$ のように振る舞い、深強結合系においては非常に良い精度で未知パラメータ θ を推定できる。一方で、この系においても、 g の大きい領域ではエネルギーギャップが指数関数的に小さくなり、開放系や非ゼロ温度系ではシュレディンガーの猫状態のコヒーレンスが急速に失われてしまう。そのため、大きい g ではかえって推定精度は悪くなり、最善の推定精度はほどよい大きさの g で達成される³⁴) (図9)。

7. 終わりに

本記事では、物質と光の超～深強結合領域における物理を、主に量子ラビ模型に限定して議論した。1 つの二準位原子と 1 つの共振器モードという極めてシンプルな設定で

あっても、系のパラメータによって様々な低エネルギー有効ハミルトニアンを作ることができるというエンジニアリング的な面白さがある。特に、通常は多数の原子が独立に1つの共振器モードと相互作用する Dicke 模型のような多体系で議論する超放射相転移を、少数系でも有限サイズスケールも含めて厳密に解析することができる。

応用面では、量子情報処理へ向けた様々な理論提案があるが、それを実証する実験はまだほとんどない。その理由として、提案されているプロトコルの多くが、結合定数 g を時間的に変調させる必要があることが挙げられるだろう。深強結合が実現されたのは今から5年程度前であるが、超～深強結合領域において結合定数を時間依存させることはほとんどできていない。最近、超伝導量子回路を用いた、共振器間の可変な超強結合が報告された⁴⁹⁾。また、この記事では扱うことができなかったが、興味深い話題として、量子シミュレーションへの応用⁵⁰⁾、ゲージ自由度に伴う曖昧性^{51, 52, 53, 54, 55)}、厳密解と可積分性^{56, 57)}、量子ラビ模型の隠れた対称性^{58, 59, 60, 61)} などがある。

本稿の執筆にあたり、後藤慎平、仙場浩一、吉原文樹、布施智子、馬場基彰の各氏より有益な助言を頂きました。感謝申し上げます。また、本稿中の研究の一部は、JST 戦略的創造研究推進事業 (JPMJCR1775) の支援を受けて行われました。

参考文献

- 1) 越野和樹, 共振器量子電磁力学: 量子コンピュータのハードウェア理論 (SGC ライブラリ 162).
- 2) S. Haroche et al., Phys. Today **42**, 24 (1989).
- 3) A. Chiba et al., Appl. Phys. Lett. **86**, 261106 (2005).
- 4) T. Aoki et al., Nature **443**, 671 (2006).
- 5) R. Yalla et al., Phys. Rev. Lett. **109**, 063602 (2012).
- 6) 青木隆朗, 日本物理学会誌 **76**, 339 (2021).
- 7) S. Noda et al., Nat. Photon. **1**, 449 (2007).
- 8) T. Tanabe et al., Nat. Photon. **1**, 49 (2007).
- 9) 水落憲和, 応用物理 **87**, 251 (2018).
- 10) 小坂英男ほか, 日本物理学会誌 **75**, 683 (2020).
- 11) 荒川泰彦ほか, レーザー研究 **47**, 210 (2019).
- 12) Y. Nakamura et al., Nature **398** 786 (1999).
- 13) 宇佐見康二ほか, 日本物理学会誌 **73**, 700 (2018).
- 14) A. A. Clerk et al., Nat. Phys. **16**, 257 (2020).
- 15) 長田有登, 日本物理学会誌 **76**, 498 (2021).
- 16) N. Imoto et al., Phys. Rev. A **32**, 2287 (1985).
- 17) A. Blais et al., Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).
- 18) F. Yoshihara et al., Nat. Phys. **13**, 44 (2017).
- 19) 布施智子ほか, 日本物理学会誌 **73**, 21 (2018).
- 20) P. Forn-Díaz et al., Phys. Rev. Lett. **105**, 237001 (2010).
- 21) A. F. Kockum et al., Phys. Rev. A **95**, 063849 (2017).
- 22) S. P. Wang, Phys. Rev. Applied, **13**, 054063 (2020).
- 23) K. Koshino et al., Phys. Rev. Research **4**, 013013 (2022).
- 24) F. Yoshihara et al., Phys. Rev. A **95**, 0533824 (2017).
- 25) F. Yoshihara et al., Phys. Rev. Lett. **120**, 183601 (2018).
- 26) A. Bayer et al., Nano Lett. **17**, 6340 (2017).
- 27) N. S. Mueller et al., Nature **583**, 780 (2020).

- 28) Q. Xie et al., J. Phys. A **50**, 113001 (2017).
- 29) M. J. Hwang et al., Phys. Rev. Lett. **115**, 180404 (2015).
- 30) R. H. Zheng et al., arXiv:2207.05512.
- 31) S. P. Wang et al., arXiv:2209.05747.
- 32) F. Beaudoin et al., Phys. Rev. A **84**, 043832 (2011).
- 33) S. De Liberato et al., Phys. Rev. A, 053810 (2009).
- 34) T. Shitara et al., New J. Phys. **23**, 103009 (2021).
- 35) Z. Xiao et al., Phys. Rev. A **99**, 013827 (2019).
- 36) P. Nataf et al, Phys. Rev. Lett. **107**, 190402 (2011).
- 37) R. Stassi et al, Phys. Rev. A **97**, 033823, (2018).
- 38) V. E. Manucharyan et al., Science **326**, 113 (2009).
- 39) L. Viola et al, Phys. Rev. A **58**, 2733 (1998).
- 40) L. Viola et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 2417 (1999).
- 41) G. Romero et al., Phys. Rev. Lett. **108**, 120501 (2012).
- 42) V. Giovannetti et al., Phys. Rev. Lett. **96**, 010401 (2006).
- 43) V. Giovannetti et al., Nat. Photonics **5**, 222 (2011).
- 44) I. Frérot et al, Phys. Rev. Lett. **121**, 020402 (2018).
- 45) M. M. Rams et al., Phys. Rev. X **8**, 021022 (2018).
- 46) L. Garbe et al., Phys. Rev. Lett. **124**, 120504 (2020).
- 47) K. Gietka et al., Quantum **6**, 700 (2022).
- 48) H. Kwon et al., Phys. Rev. Lett. **122** 040503 (2019).
- 49) T. Miyanaga et al., Phys. Rev. Applied **16**, 064041 (2021).
- 50) Y. Salathé et al., Phys. Rev. X **5**, 021027 (2015).
- 51) D. De Bernardis et al., Phys. Rev. A **98**, 053819 (2018).
- 52) A. Stokes et al, Nat. Comm. **10**, 499 (2019).
- 53) M. Roth et al., Phys. Rev. Research **1**, 033128 (2019).
- 54) O. Di Stefano et al., Nat. Phys. **15**, 803 (2019).
- 55) L. Garziano et al., Phys. Rev. A **102**, 023718 (2020).
- 56) D. Braak, Phys. Rev. Lett. **107**, 100401 (2011).
- 57) D. Braak et al., J. Phys. A **49**, 300301 (2016).
- 58) Z. M. Li et al, J. Phys. A **48**, 454005 (2015).
- 59) M. Wakayama, J. Phys. A **50**, 174001 (2017).
- 60) S. Ashhab, Phys. Rev. A **101**, 023808 (2020).
- 61) K. Kimoto et al., Int. Math. Res. Not. **2021**, 9458 (2021).

著者紹介または非会員著者の紹介

設楽智洋氏: 量子情報理論, 特に量子推定理論に興味がある。
越野和樹氏: 専門は量子光学 (理論)。量子開放系のダイナミクスとその応用に興味がある。

(2023年8月9日原稿受付)

Ultra- and deep-strong coupling regimes of cavity QED

Tomohiro Shitara and Kazuki Koshino

abstract: Cavity Quantum Electrodynamics (QED) studies the light-matter coupling in one of the simplest settings. Recently, the ultra- and deep-strong coupling regimes have been experimentally realized, where the coupling g is comparable or even greater than the transition energies of components such as cavity modes and atoms. We review the mysterious phenomenon in this regime caused by the anti-rotating terms in the coupling Hamiltonian.