数学実習 2011 年度第 3 回
担当：中口悦史

今週の講義メモ：計算の基礎・漸化式と逐次近似

数列と級数と漸化式

数列　ある順序で並べられた数の集合。ここでは非負整数 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ で順序づけられたものとする。

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

a_0 を初項，a_n を第 n 項とよぶ。集合の記法 $\{a_n\}$ で数列を表すこともある。

代表的な数列

- 自然数の列　$1, 2, 3, 4, \ldots$:　$a_n = n + 1$
- 非負の偶数の列　$0, 2, 4, 6, \ldots$:　$a_n = 2n$
- 非負の奇数の列　$1, 3, 5, 7, \ldots$:　$a_n = 2n + 1$
- 三角数の列　$0, 1, 3, 6, 10, \ldots$:　$a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- 平方数の列　$0, 1, 4, 9, 16, \ldots$:　$a_n = n^2$
- 等差数列：初項 a，公差 h のとき　$a_n = a + nh$
- 等比数列：初項 a，公比 r のとき　$a_n = ar^n$
- Fibonacci 数列　$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

漸化式　数列の連続する項の間の関係を与える式。特に，前の項を用いて後の項を表現する式。通常は出発式（初めの数項の値を与える式）と合わせて与えられる。

2 項漸化式　隣接 2 項の間の関係式
数列 $\{a_n\}$ について，ある関数 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ があって，初項 a_0 が決まったとき，

$$a_{n+1} = f(n, a_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

によって順に一般項 a_n が求められる。

3 項以上の漸化式　連続する m 項の間の関係式を m 項漸化式とよぶ。m 項漸化式には $(m-1)$ 個の出発式が必要。

代表的な数列の漸化式

- 自然数の列　$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 1$
- 非負の偶数の列　$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2$
- 非負の奇数の列　$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$
- 三角数の列　$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + (n+1)$　隣接項の差がちょうど後の項の番号になっている
- 平方数の列　$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2n - 1$　隣接項の差が奇数になっている
- 等差数列：初項 a，公差 h のとき　$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n + h$
- 等比数列：初項 a，公比 r のとき　$a_0 = a, \quad a_{n+1} = a_n r$
- Fibonacci 数列　$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

数列の収束

数列の収束　数列 $\{a_n\}$ が極限 α を持つ　$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Longleftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\epsilon): \quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

Cauchy の収束判定定理　数列 $\{a_n\}$ が収束列である　$\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ は Cauchy 列である，すなわち，

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N(\epsilon): \quad n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

級数　数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加え合わせた和の形式

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

を，数列 $\{a_n\}$ の級数とよび，初めの n 項の和

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

を，級数の第 n 部分和という。部分和の列が収束 $S_n \to S\ (n \to \infty)$ するとき，級数は収束するという。また，その極限 S を級数の和とよび，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$ と書く。

代表的な数列の級数

- 自然数の列　$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- 非負の偶数の列　$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k) = n(n+1)$
- 非負の奇数の列　$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$
- 等比数列：初項 a，公比 r のとき　$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = a\,\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$

級数の部分和の漸化式　$S_n = S_{n-1} + a_n$
複数の数の和は，一度には計算できないので，漸化式を用いて一項ずつ加えていく。

漸化式を用いた解法

複数個の数の和　n 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の和

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

を計算するには，その部分和

$$S_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

が満たす漸化式

$$S_0 = 0, \qquad S_k = S_{k-1} + x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

によって，$S = S_n$ を求めればよい。（**要確認**）

ベキ乗　Pascal のようにベキ乗演算が用意されていないときは，プログラムしないといけない。数列 $\{y_n\}$ を漸化式

$$y_0 = 1, \qquad y_k = a y_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

で定義すると，その第 n 項 $y_n = a^n$ となる。(**要確認**)

階乗　漸化式

$$z_0 = 1, \qquad z_k = k z_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

によって数列 $\{z_n\}$ を定義すると，その第 n 項 $z_n = n!$ となる。(**要確認**)

多項式（Horner 法）　実数 x の値が与えられたときに，

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

の値を求める場合は，各項のベキ乗をそれぞれ計算してから加えるのではなく，

$$P = (\cdots(\cdots(a_0 x + a_1)x + \cdots + a_k)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n$$

のようにまとめることができる（各自確認のこと）ので，一度もベキ乗を計算しなくて済む。この計算は，漸化式

$$p_0 = a_0, \qquad p_k = p_{k-1} x + a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

で与えることができて，$P = p_n$ となる。

係数の列 $\{a_k\}$ が，適当な数列 $\{b_k\}$ を係数にとる漸化式

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{b_k} \quad \text{つまり} \quad a_k = b_k a_{k+1}$$

を満たすときは，

$$P = ((\cdots(\cdots(b_0 x + 1)\, b_1 x + \cdots + 1)\, b_k x + \cdots + 1)\, b_{n-1} x + 1)\, a_n$$

のようにまとめることができる（各自確認のこと）ので，漸化式

$$p_0 = 1, \qquad p_k = b_{k-1} p_{k-1} x + 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

を計算して，$P = a_n p_n$ で与えることができる。

逐次近似

極限操作を含む式はコンピュータで計算できないので，何らかの近似が必要。ただし，極限操作を途中で打ち切るので，必ず誤差が生じる。この誤差は打ち切り誤差とよばれ，解析的にある程度評価可能である。

数列の極限の近似　数値 α が数列 $\{a_n\}$ の極限としてしか計算できないとき，Cauchy の収束判定定理を基にして，極限に十分近づいたと判定できる項 a_n で近似して求める。特に $\{a_n\}$ が漸化式で決まる場合には有効な方法。

1. 誤差基準値 $\varepsilon(>0)$ と計算する項数の上限 N を決める（10^{-6} など）。
2. 漸化式を用いる場合は，出発式で初めの数項を決める。$k := 0$
3. 以下の手順を，$|a_k - a_{k-1}| < \varepsilon$ または $k > N$ となるまで繰り返す。
   (a) a_{k+1} を計算する。（一般項でも漸化式でも）
   (b) k を 1 増やす。
4. $k \leqq N$ なら収束したので，a_k を極限の近似値とする。$k > N$ なら収束していないので，その表示をする。終了。

無限級数の和（極限）の近似　収束数列に準じる。加える項が十分小さくなったら，その時の部分級数を近似値に採用する。

1. 誤差基準値 $\varepsilon(>0)$ と計算する項数の上限 N を決める（10^{-6} など）。
2. $S := 0$; $k := 0$
3. 以下の手順を，$|a_k| < \varepsilon$ または $k > N$ となるまで繰り返す。
   (a) a_k を計算する。（一般項でも漸化式でも）
   (b) $S := S + a_k$
   (c) k を 1 増やす。
4. $k \leqq N$ なら収束したので，S を級数の和の近似値とする。$k > N$ なら収束していないので，その表示をする。終了。

関数値の近似　関数値を Taylor 級数を用いて計算する場合は，無限級数の場合に準じる。つまり，Taylor 級数を途中で打ち切って，有限項の部分和で近似する。（何項目で打ち切るかの判断には，Taylor の定理を応用する。実は難問。）Taylor 級数の部分和は，多項式なので，Horner 法で計算する。

非線形方程式の解の近似　方程式 $f(x) = 0$ を近似的に解く。

二分法　中間値の定理の応用。f は連続関数であればよい。

1. 解が存在すると思われるあたりに，$f(a)f(b) < 0$ となる 2 点 a, b を決める。
2. 誤差基準値 $\varepsilon(>0)$ を決める（10^{-6} など）。
3. $|b - a| \geq \varepsilon$ である間，以下の手順を繰り返す。
   (a) $x := (a + b)/2$ とおく。{ a と b の間に解があるはず。}
   (b) $f(a)f(x) < 0$ なら $b := x$，そうでなければ $a := x$ とする。{ 符号が変わる部分を取り出す。}
4. $x := (a + b)/2$ を近似解とする。終了。

ニュートン法　Taylor 級数を 1 次項で打ち切った形。f は微分可能で，解の近傍で $f'(x) \neq 0$ を仮定。

1. 解が存在すると思われるあたりに，$f(a) \neq 0$ かつ $f'(a) \neq 0$ となる点 a を決める。
2. 誤差基準値 $\varepsilon(>0)$ を決める（10^{-6} など）。
3. $x_0 := a$, $k := 0$ とおく。
4. 以下の手順を，$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ となるまで繰り返す。
   (a) $x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ とおく。
   { $f(x_{k+1}) \fallingdotseq f(x_k) + (x_k - x_{k+1})f'(x_k) = 0$ によって，近似解 x_k からより良い近似解 x_{k+1} を求める。}
   (b) k を 1 増やす。
5. 収束したら x_k を近似値とする。終了。

漸化式の計算を Pascal で実装する際の注意

- 数列や級数をまずは配列で用意してみる。0 番から始まる数列に対しては，配列の添字も 0 から始める。
  `var a: array[0..100] of real`　など
- 回数が決まっている繰返しは `for` 文で。
  回数があらかじめ分からない繰返しは `while` 文あるいは `repeat` 文で（たぶん `repeat` 文が使いやすい）。
- 数列の途中の値を保存する必要がなければ，配列でなく数個の変数をうまく使い回すことを考えてみる。