

統計（医療統計）

第11回 等分散検定と母比率の検定

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部 数学講座

第14章 検定 の内容

- I. 検定
- II. 母平均の検定
- III. 母分散の検定 . . . 割愛しました
- IV. 平均値の差の検定 . . . 前回ここまで
- V. 等分散の検定
- VI. 比率の検定
- VII. 適合度の検定
- VIII. 独立性の検定

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

母平均 μ に関して

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$

を検定する.

- 通常, H_0 が正しくないことを期待して行う.
- とりあえず **正規母集団**を仮定.

□ 【注意】一般に, 母集団分布として特定の分布(正規分布など)を仮定して行う検定を**パラメトリック検定**, そうでないものを**ノンパラメトリック検定**という. この授業ではパラメトリック検定のみ扱う(したがって必然的に, 母集団分布の仮定には常に留意する必要がある).

- 以下, 標本サイズを n , 標本平均を X' , 有意水準を α とする

1-母分散が既知のとき

母分散を σ^2 とする. X' の標準化変数 $Z = (X' - \mu_0) / (\sigma / \sqrt{n})$ が (正規母集団の仮定のもとでは厳密に) 標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので, これを**検定統計量**とする.

両側検定の場合(対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$):

- $|Z| \geq z(\alpha/2)$ ならば H_0 を棄却.
- $|Z| < z(\alpha/2)$ ならば H_0 を棄却しない(採択).

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

1-母分散が既知のとき(続き)

【注意(教科書への補足)1】

- 以上は標本平均の標準化変数 Z を検定統計量とした場合.
- 標本平均 X' そのものを検定統計量として X' の棄却域を考えるなら

$$P(-z(\alpha/2) \leq Z \leq z(\alpha/2)) = \gamma (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P(\mu_0 - z(\alpha/2) \sigma/\sqrt{n} \leq X' \leq \mu_0 + z(\alpha/2) \sigma/\sqrt{n}) = \gamma$$

となるから,

$$(\mu_0 - z(\alpha/2) \sigma/\sqrt{n}, \mu_0 + z(\alpha/2) \sigma/\sqrt{n})$$

が X' の採択域で、この外が棄却域.

- **RECALL:** 「 μ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間」は

$$(X' - z(\alpha/2) \sigma/\sqrt{n}, X' + z(\alpha/2) \sigma/\sqrt{n})$$

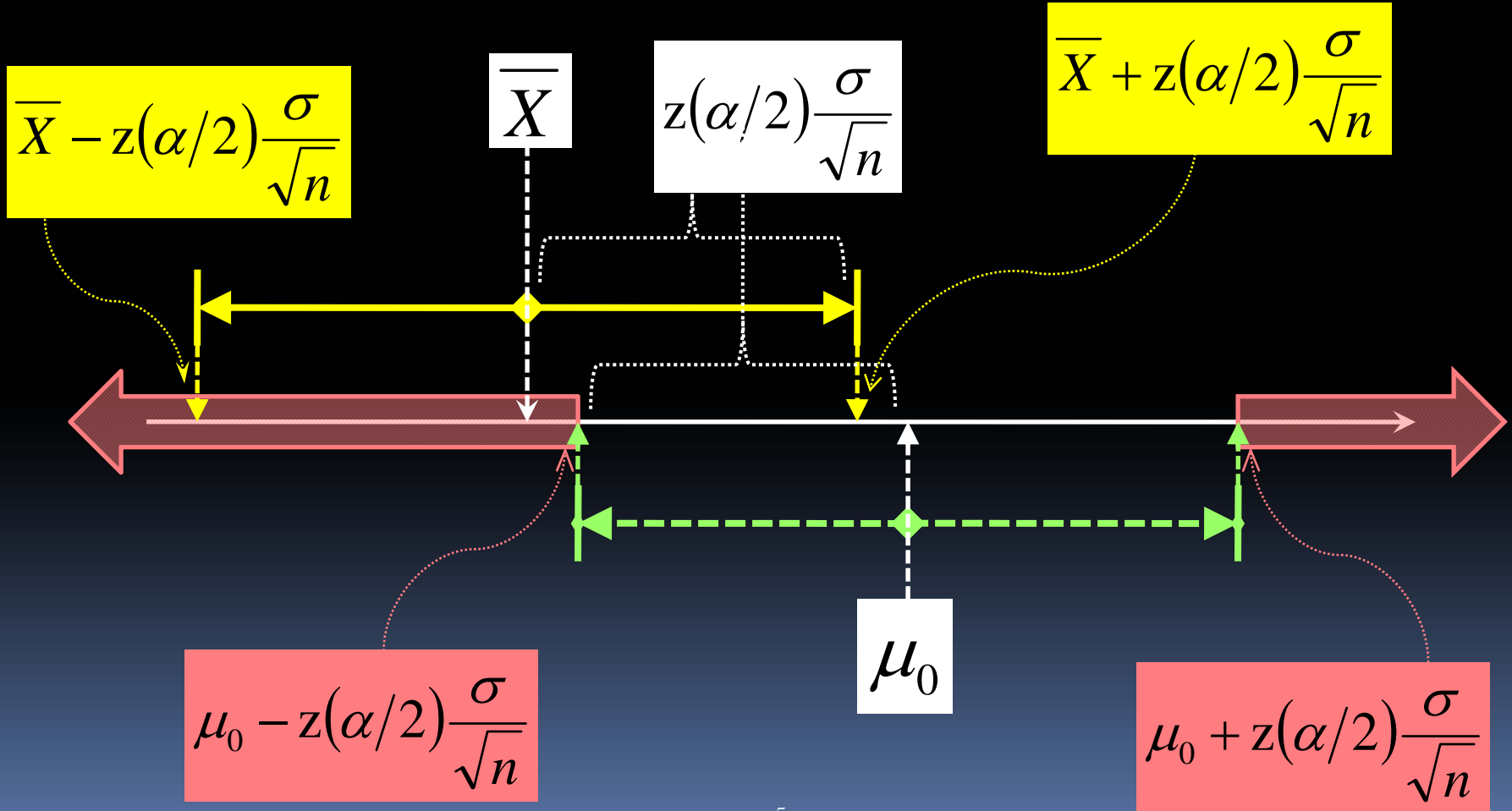
だった. すなわち両側検定の場合, 有意水準 $100\alpha\%$ での X' の採択域は, μ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間を平行移動したものであり,

- 「 μ_0 が μ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間に入る」ことと
- 「 X' の実現値が有意水準 α での採択域に入る」ことが同値.

(つまり区間推定をやれば両側検定の結果もわかる!)

100 (1 - α) %信頼区間と有意水準 α の両側検定における
 採択域・棄却域の関係 (1)
 (母分散既知・標本平均を検定統計量とした場合)

$|\bar{X} - \mu_0| > z(\alpha/2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ のとき $\rightarrow H_0: \mu = \mu_0$ は**棄却**

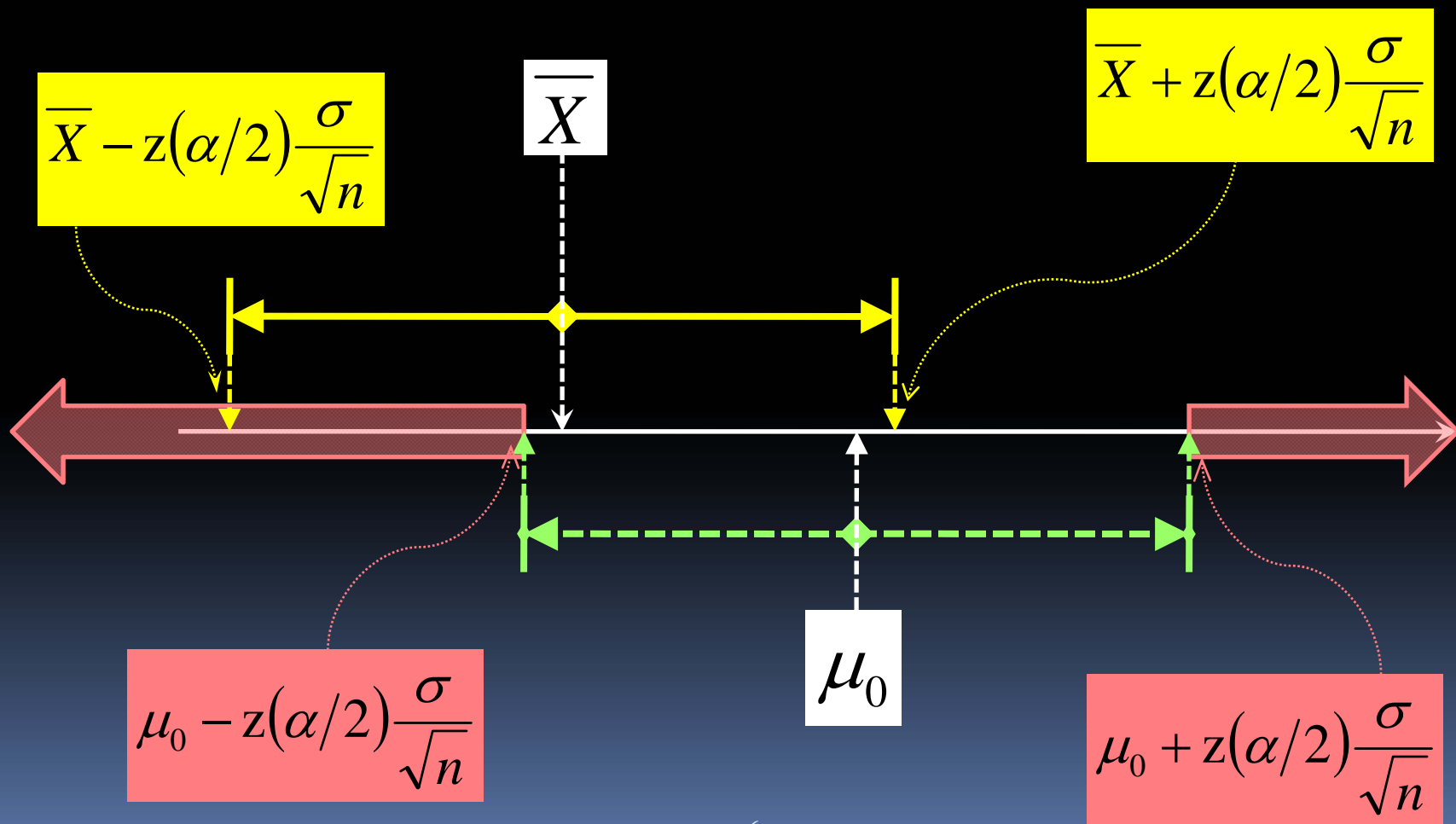


100 (1 - α) %信頼区間と

有意水準 α の両側検定における採択域・棄却域の関係 (2)
(母分散既知・標本平均を検定統計量とした場合)

$$|\bar{X} - \mu_0| < z(\alpha/2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ のとき}$$

→ $\mu = \mu_0$ は **棄却されない**



[復習] 第14章 II. 母平均の検定

1-母分散が既知のとき(さらに続き)

【注意(教科書への補足)2】

- 片側検定の場合
 - 対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ (右片側検定)のときは
「① $Z \geq z(\alpha)$ で棄却, ② $Z < z(\alpha)$ で採択」
 - 対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$ (左片側検定)のときは
「① $Z \leq -z(\alpha)$ で棄却, ② $Z > -z(\alpha)$ で採択」
- 正規母集団の仮定がなくても, 標本サイズがある程度大きければ X' の分布は正規分布で近似でき, 同様に検定できる(区間推定するときと同じ)

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

p.115例題1 (母分散が既知のとき)

副甲状腺機能低下症の患者における、血清カルシウムの平均値 μ を検定する問題.

- 標本サイズ $n=16$ (人), 標本平均 7.4mg/dl
- 健常人の場合:
 - 平均 9.8mg/dl ... 帰無仮説で用いる値
 - 標準偏差 0.5mg/dl ... 既知の母標準偏差として採用
 - 正規分布 ... 検定対象も正規母集団と考える

[解答]

帰無仮説 $H_0: \mu = 9.8\text{mg/dl}$ (健常者と同じ)

対立仮説 $H_0: \mu \neq 9.8\text{mg/dl}$ (健常者と異なる・両側検定)

検定統計量: 標本平均 X' の標準化変数 $Z = (X' - \mu_0) / (\sigma / \sqrt{n}) \sim N(0,1)$

Z の実現値 = ... = $-19.2 < -1.96 = -z(0.025)$ より棄却.

よって血清カルシウムの数値 (平均値) は低くなると結論づけられる.

- **【追加問題1】** 片側検定なら?
(解答: $-z(0.05) = -1.645$ と比較し, やはり棄却) ← 計算せずともわかる!
- **【追加問題2】** 標本平均 X' を検定統計量とした場合の X' の棄却域は?
- **【追加問題3】** 母平均の95%信頼区間は? それと検定問題との関係は?

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

2-母分散が未知のとき

(★標本サイズが大きければ正規分布に帰着させて解くことができるのは推定の場合と同じ)

標本の不偏分散を U^2 とする.

$$T = (\bar{X} - \mu_0) / (U / \sqrt{n}) \quad (\text{スチューデント比})$$

が自由度 $n-1$ の t 分布に従うので、これを検定統計量として、

両側検定の場合:

- ① $|T| \geq t_{n-1}(\alpha/2)$ ならば H_0 を棄却.
- ② $|T| < t_{n-1}(\alpha/2)$ ならば H_0 を棄却しない (採択).

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

2-母分散が未知のとき(続き)

【注意(教科書への補足)】

- t分布を用いるので正規母集団の仮定は必須.

(以降は母分散既知の場合と同様)

- 片側検定なら(対立仮説 H_1 が $\mu > \mu_0$ または $\mu < \mu_0$)
「① $T \geq t_{n-1}(\alpha)$ で棄却, ② $T < t_{n-1}(\alpha)$ で採択」($H_1: \mu > \mu_0$)
または
「① $T \leq -t_{n-1}(\alpha)$ で棄却, ② $T > -t_{n-1}(\alpha)$ で採択」($H_1: \mu < \mu_0$)

- 標本平均 X' を検定統計量として X' の棄却域を考えるなら

$$P(t_{n-1}(\alpha/2) \leq T \leq t_{n-1}(\alpha/2)) = \gamma (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P(\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2) U / \sqrt{n} \leq X' \leq \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2) U / \sqrt{n}) = \gamma$$

となるから,

($\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2) U / \sqrt{n}$, $\mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2) U / \sqrt{n}$)
が X' の採択域で、この外が棄却域.

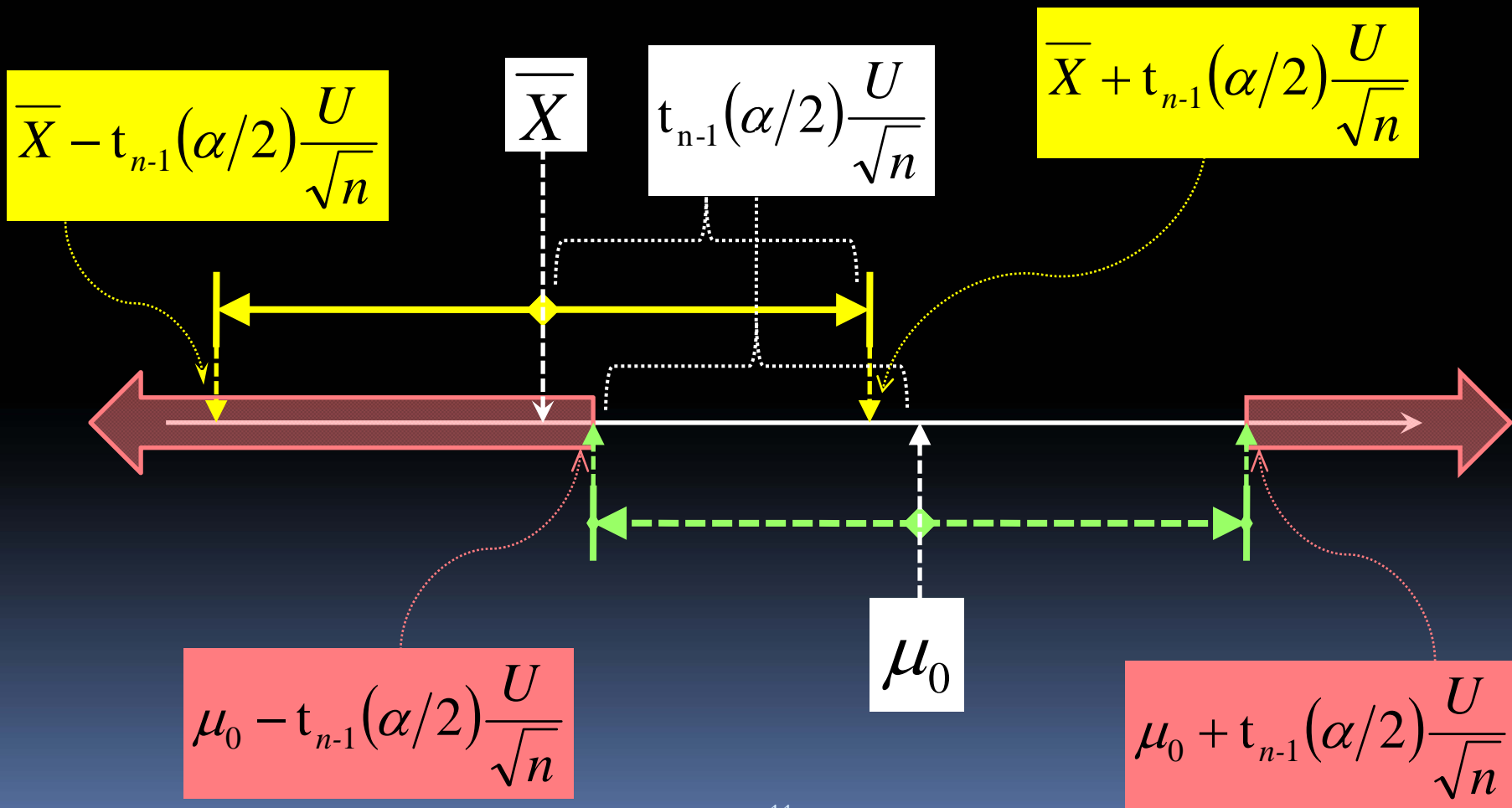
- 両側検定の場合、「有意水準 $100\alpha\%$ での X' の採択域」と「 μ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間」が平行移動の関係にあるのは母分散既知の場合と同様.

100 (1 - α) %信頼区間と

有意水準 α の両側検定における採択域・棄却域の関係 (1)
(母分散未知・標本平均を検定統計量とした場合)

$$|\bar{X} - \mu_0| > t_{n-1}(\alpha/2) \frac{U}{\sqrt{n}} \text{ のとき}$$

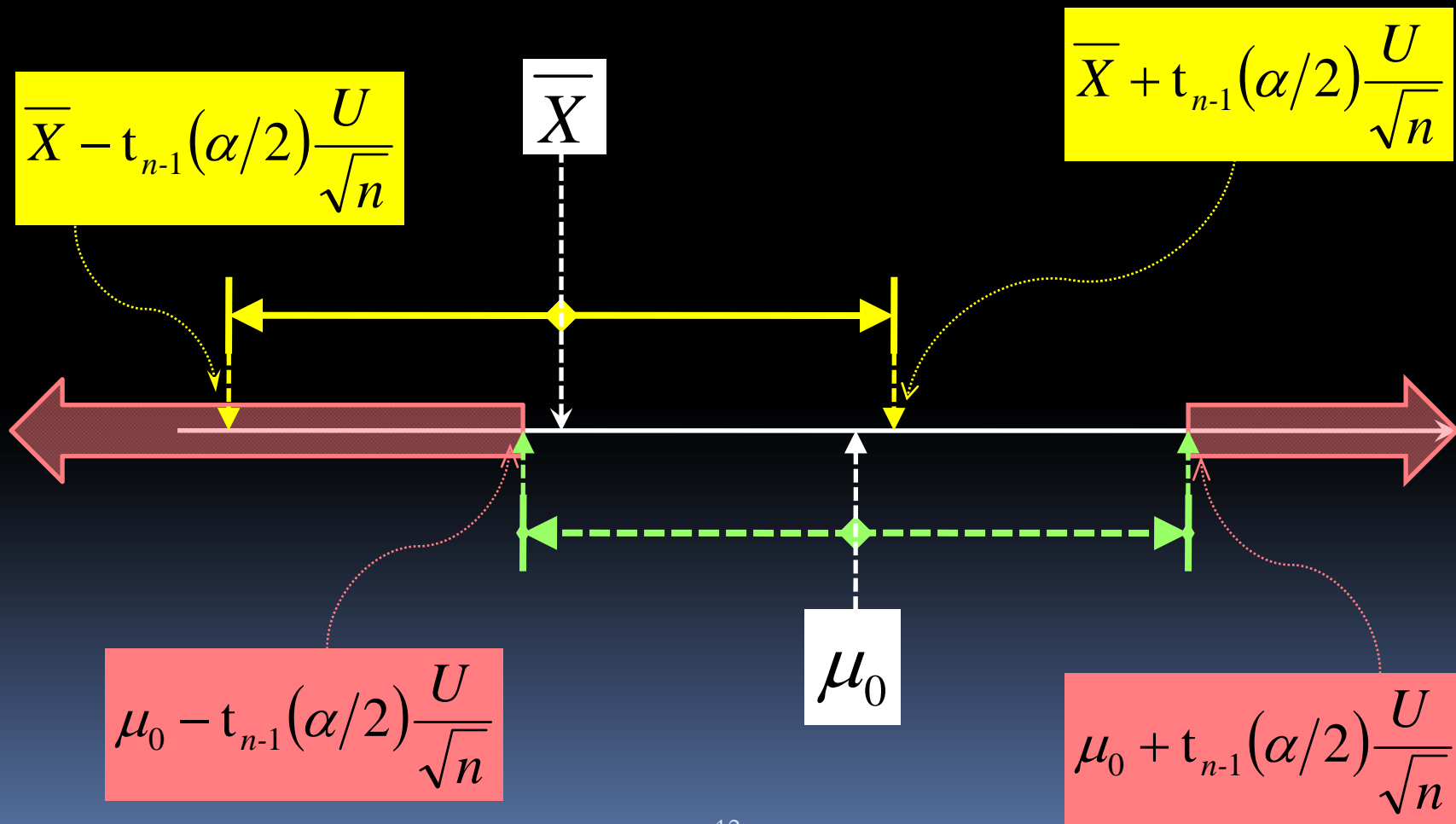
→ $H_0: \mu = \mu_0$ は **棄却**



100 (1 - α) %信頼区間と

有意水準 α の両側検定における採択域・棄却域の関係 (2)
(母分散未知・標本平均を検定統計量とした場合)

$|\bar{X} - \mu_0| < t_{n-1}(\alpha/2) \frac{U}{\sqrt{n}}$ のとき $\rightarrow H_0: \mu = \mu_0$ は **棄却されない**



あらためて第14章 検定 の内容

- I. 検定
- II. 母平均の検定 ・ ・ ・ ここまで終わった
- III. 母分散の検定 ・ ・ ・ 割愛します
- IV. 平均値の差の検定 ←次ここ
- V. 等分散の検定
- VI. 比率の検定
- VII. 適合度の検定
- VIII. 独立性の検定

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

に関して, これらの母集団の平均値が等しいかどうかを調べる.
すなわち,

$$\text{帰無仮説 } H_0: \mu_1 = \mu_2$$

を検定する.

1-母分散が既知のとき (あまり現実的ではないが...)

2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \dots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}\}$$

とする (σ_1^2, σ_2^2 は既知).

- 標本平均をそれぞれ X', Y' とすると

$$X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1), Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$$

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

1-母分散が既知のとき(続き)

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2 / n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2 / n_2)$ より
$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2)$$
- よって標準化変数:
$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}$$
が $N(0,1)$ に従う.
- 分布さえ決まってしまうえば, あとの手順は II. でやった検定と同様!
- 【注意1】帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ のもとでは $\mu_1 - \mu_2 = 0$ なので, 「 $-(\mu_1 - \mu_2)$ 」を省略した統計量を考えればよい.
- 【注意2】教科書には
両側検定(対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$)
の場合しか載っていないが, 事前に大小関係を予測する根拠があれば
片側検定 ($H_1: \mu_1 > \mu_2$ または $H_1: \mu_1 < \mu_2$)
も当然あり得る.

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

1-母分散が既知のとき(補足)

特に $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (すなわち等分散) のときは

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma^2 / n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma^2 / n_2)$
より

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2))$$

- よって標準化変数:

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}$$

が $N(0,1)$ に従う.

(注: 帰無仮説のもとでは $\mu_1 - \mu_2 = 0$ なので, 「 $-(\mu_1 - \mu_2)$ 」は消える)

★次にやる「2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき」と比較せよ.

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

1-母分散が既知のとき(補足)

母分散既知で等分散の場合についてまとめると以下の通り:

(標本平均 X' , Y' の実現値をそれぞれ x' , y' とする)

(1) [両側検定] $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$$z := (x' - y') / \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}$$

とおくと,

$|z| \geq z(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(2) [(右)片側検定] $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 > \mu_2$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$z \geq z(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき

次の定理を用いる(教科書では詳しく説明されていないので注意!):

定理

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \dots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}\}$$

とし, これらの標本の平均, 不偏分散をそれぞれ $\bar{X}, \bar{Y}, U_1^2, U_2^2$ とする.

このとき, 確率変数

$$T := \{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ のt分布に従う.

ただし, S_p^2 は U_1^2, U_2^2 の統合分散と呼ばれ,

$$\begin{aligned} S_p^2 &:= \{(n_1 - 1)U_1^2 + (n_2 - 1)U_2^2\} / (n_1 + n_2 - 2) \\ &= \{\sum (X_i - \bar{X})^2 + \sum (Y_i - \bar{Y})^2\} / (n_1 + n_2 - 2) \end{aligned}$$

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき(続き)

【注意1】

$T = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2(1/n_1 + 1/n_2)\}}$
と、母分散(σ^2)既知の場合の

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 / (1/n_1 + 1/n_2))$$

の標準化変数:

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

の類似に注意.

母分散 σ^2 が統合分散

$$S_p^2 = \{(n_1 - 1)U_1^2 + (n_2 - 1)U_2^2\} / (n_1 + n_2 - 2)$$

に置き換わっただけ.

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき(続き)

統合分散の意味するところ:

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \{(n_1-1)U_1^2 + (n_2-1)U_2^2\} / (n_1+n_2-2) \\ &= \{(n_1-1)U_1^2 + (n_2-1)U_2^2\} / \{(n_1-1) + (n_2-1)\} \end{aligned}$$

であるから, U_1^2, U_2^2 の重み付き平均とみなすこともできる.

ここで

$$\begin{aligned} E(S_p^2) &= \{(n_1-1)E(U_1^2) + (n_2-1)E(U_2^2)\} / \{(n_1-1) + (n_2-1)\} \\ &= \{(n_1-1)\sigma^2 + (n_2-1)\sigma^2\} / \{(n_1-1) + (n_2-1)\} \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

より, S_p^2 は σ^2 の不偏推定量になっている.

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき(続き)

【注意2】

- 定理の証明は割愛. とりあえず内容をよく理解して使えればよいです.
- 等分散の仮定は本質的.
- 帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ のもとでは $\mu_1 - \mu_2 = 0$ なので, 「 $-(\mu_1 - \mu_2)$ 」を省略した統計量を考えればよい.
(母分散既知のケースと同様)

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき(まとめ)

標本平均 X' , Y' の実現値をそれぞれ x' , y' とする.

自由度 $\nu = n_1 + n_2 - 2$ とおく.

(1) [両側検定]

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$$t_0 := (x' - y') / \sqrt{\{s_p^2(1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

(すなわち定理のTの実現値)とおくと,

$|t_0| \geq t_{\nu}(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(2) [(右)片側検定]

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 > \mu_2$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$t_0 \geq t_{\nu}(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

[復習] 14章IV. への補足：「対応のある2標本」の平均値の差の検定（1）

- 教科書では、いずれも独立な（対応のない）2標本に関する問題を扱った。
 - 「対応のある2標本」 \Leftrightarrow 「独立な2標本」
- 現実には「対応がある2標本」として扱うべきケースも多い。
 - 何組かの一卵性双生児の対を用いてデータを取る。
 - マラソン走者のスタート前とゴール直後の体重の差をデータにする。
 - 同一被験者の投薬前と投薬後のデータを比較する。
 - etc.
- 2標本ではあるが、対データの差をデータとして解析を行うので、実質的には1標本問題。
 - 「独立な2標本」の場合よりずっと単純！
 - 多くの教科書では「独立な2標本」の場合と対にして扱っています。

[復習] 14章IV. への補足：「対応のある2標本」の平均値の差の検定（2）

- 母分散未知のケースを考える.
→t分布の利用（正規母集団の仮定が必要）.
- n個の対をなす標本データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ から、各対の差の値
$$d_1 = x_1 - y_1, \quad d_2 = x_2 - y_2, \quad \dots, \quad d_n = x_n - y_n$$
を算出.
- 2つの母平均をそれぞれ μ_1, μ_2 とし、
 $d' = \sum d_i / n, \quad U^2 = \sum (d_i - d')^2 / (n-1)$ とおくと
$$T := (d' - (\mu_1 - \mu_2)) / (U / \sqrt{n})$$
が自由度 $n-1$ のt分布に従う.
- 以下はこれまでと同じ要領.

[復習] 14章IV. 平均値の差の検定に関する補足 (その3)

「対応のある2標本」に関する推定・検定(まとめ)

(1) [区間推定] 母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の信頼係数 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\left(d' - t_{n-1}(\alpha/2)U/\sqrt{n}, d' + t_{n-1}(\alpha/2)U/\sqrt{n} \right)$$

(2) [両側検定]

帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ に対し, 有意水準 α で検定する場合,

$$t_0 := d' / (U / \sqrt{n})$$

とおくと, $|t_0| \geq t_{n-1}(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(3) [(右)片側検定]

帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ に対し, 有意水準 α で検定する場合, $t_0 \geq t_{n-1}(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(前回ここまで)

あらためて第14章 検定 の内容

- I. 検定
- II. 母平均の検定
- III. 母分散の検定 . . . 割愛しました
- IV. 平均値の差の検定 . . . ここまで
- V. 等分散の検定 . . . 次ここ
- VI. 比率の検定
- VII. 適合度の検定
- VIII. 独立性の検定

[もう一度復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき(まとめ)

標本平均 X' , Y' の実現値をそれぞれ x' , y' とする.

自由度 $\nu = n_1 + n_2 - 2$ とおく.

(1) [両側検定]

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$$t_0 := (x' - y') / \sqrt{\{s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

(すなわち定理のTの実現値)とおくと,

$|t_0| \geq t_{\nu}(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(2) [(右)片側検定]

帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 > \mu_2$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$t_0 \geq t_{\nu}(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

第14章 IV. 平均値の差の検定

【あらためて注意】

- 等分散の仮定は本質的.
- 分散が等しい場合について学習したが, そういうケースはたくさんあるのだろうか?
- 例題6でも「男女の分散が等しい」と仮定しているが, そういった仮定はそもそも妥当なのか?
- 分散がほぼ同じであると予想できるが確信が持てない場合というのも多々あるだろう.

→ だったら「2つの母集団の分散が等しい」という仮説を検定すればよい!

→ (「3-母分散は未知で異なるとき」を飛ばして)

「V. 等分散の検定」へ.

第14章 V. 等分散の検定 (その1)

以下の定理を用いる:

定理(教科書p.100)

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に大きさ n_1, n_2 の標本を無作為抽出し, その不偏分散をそれぞれ U_1^2, U_2^2 とする.

そのとき $F := U_1^2 / U_2^2$ は,

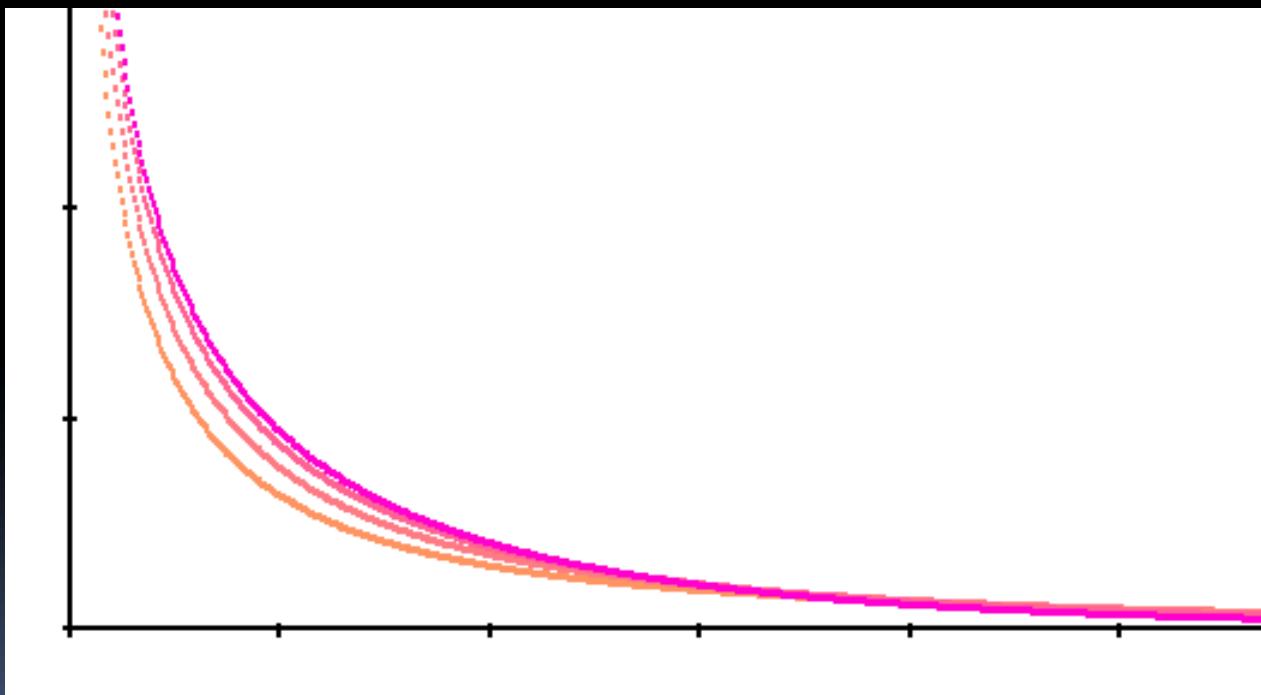
自由度対 (n_1-1, n_2-1) の F 分布 (と呼ばれる分布) に従う.

第14章 V. 等分散の検定 (その2)

(グラフは明星大学船津好明先生のWebsiteより転載しています)

F分布の密度関数 (1)

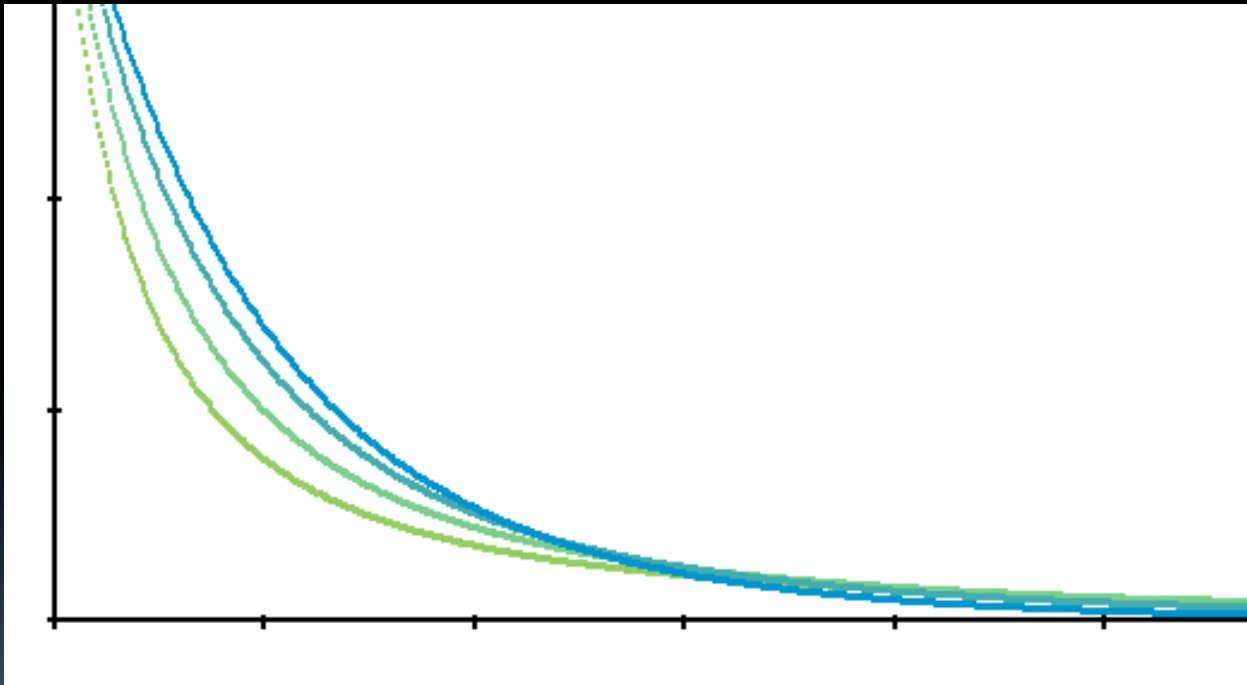
自由度対 (1, 1) (1, 2) (1, 5) (1, 20)



第14章 V. 等分散の検定 (その3)

F分布の密度関数 (2)

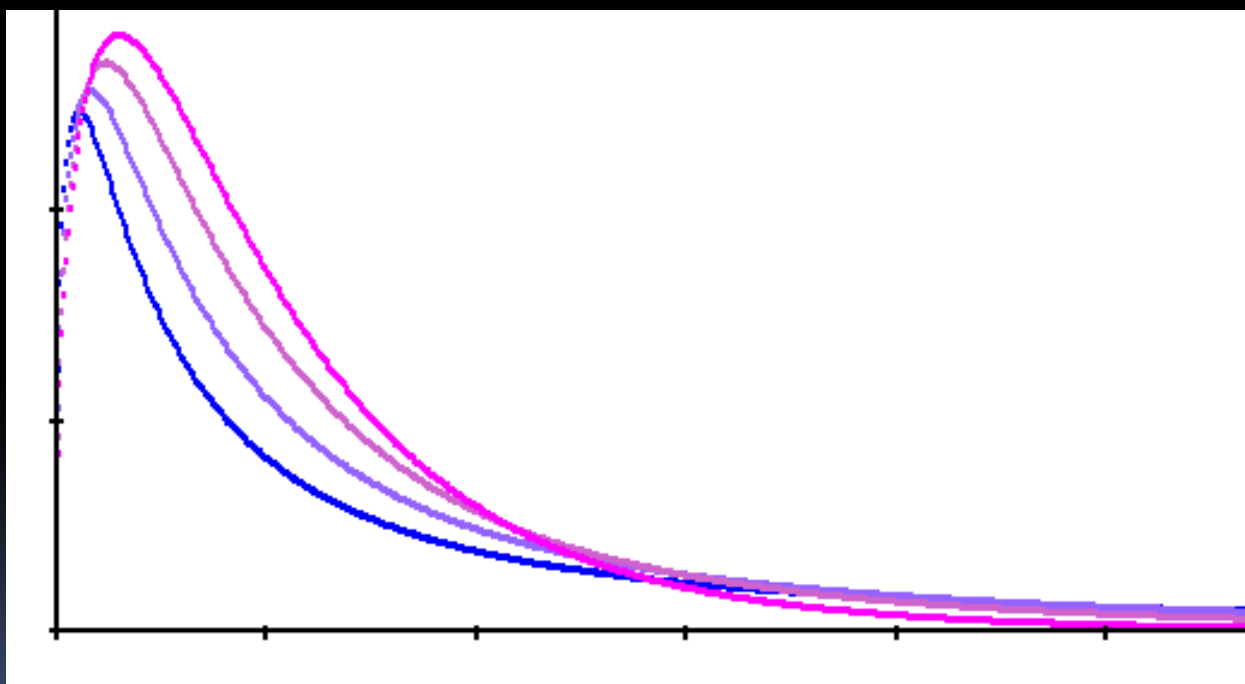
自由度対 (2, 1) (2, 2) (2, 5) (2, 20)



第14章 V. 等分散の検定 (その4)

F分布の密度関数 (3)

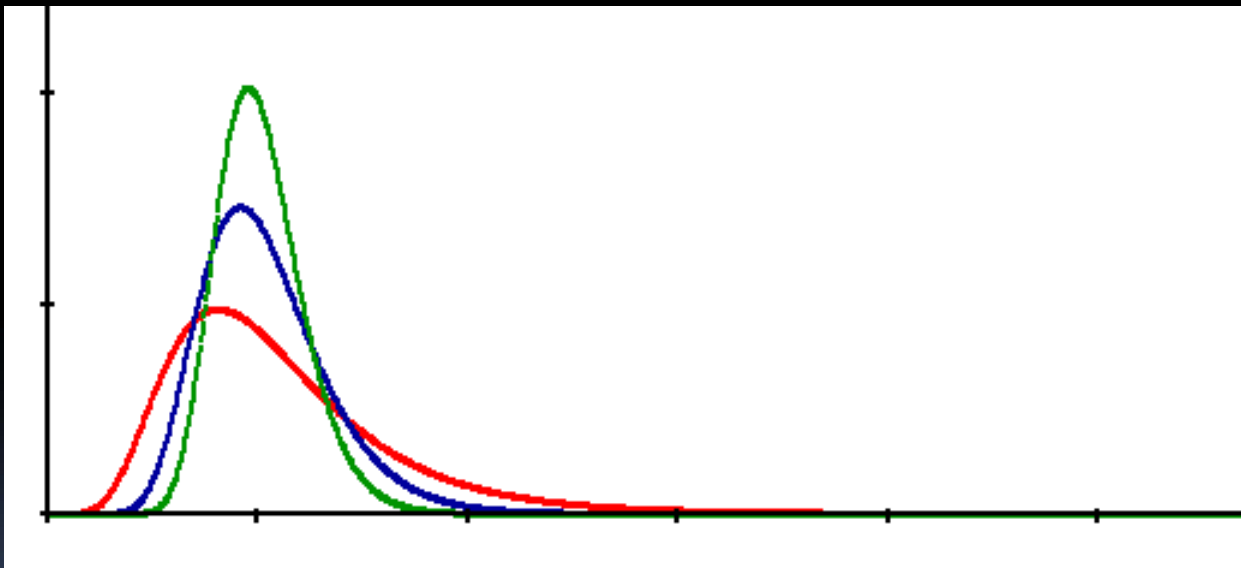
自由度対 (3, 1) (3, 2) (3, 5) (3, 20)



第14章 V. 等分散の検定 (その5)

F分布の密度関数 (4)

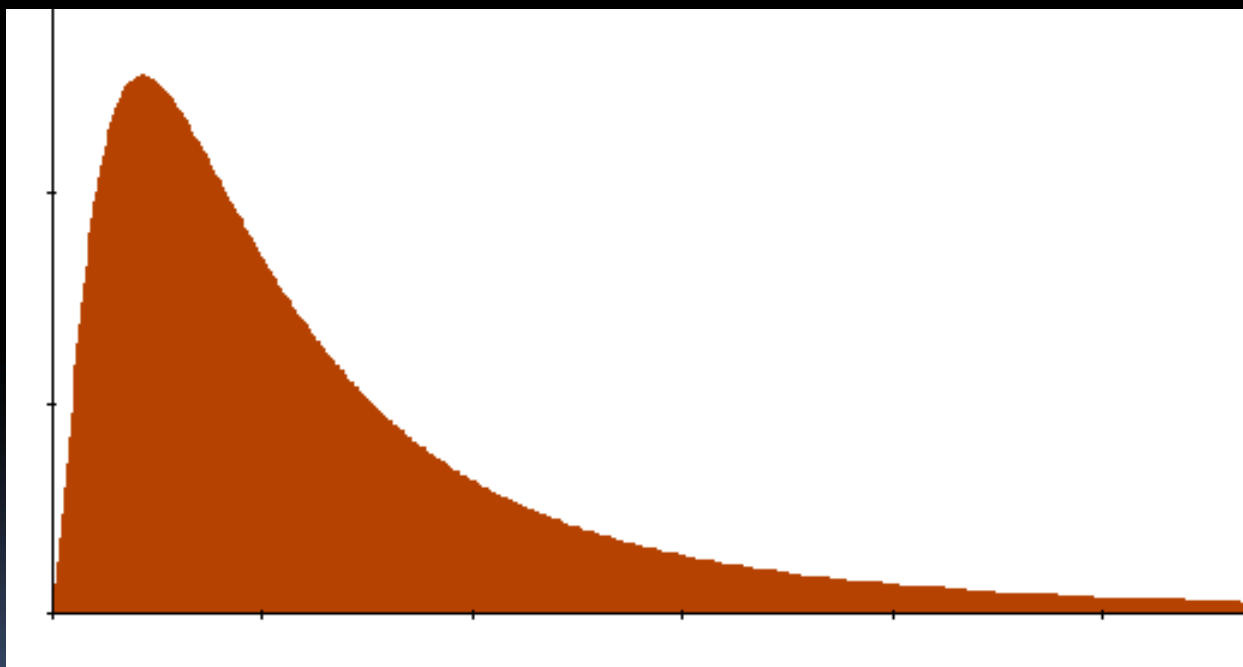
自由度対 (20, 20) (50, 50) (100, 100)



第14章 V. 等分散の検定 (その6)

F分布の密度関数 (5)

自由度対 (5, 5)



第14章 V. 等分散の検定 (その7)

- 定理を利用して

帰無仮説 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 対立仮説 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

として有意水準 α で **両側** 検定.

(以下標本サイズ n_1, n_2 , 対応する不偏分散 U_1^2, U_2^2 とする)

- 棄却域は分布の両側に存在するが, 定理より,

① U_1^2/U_2^2 は自由度対 (n_1-1, n_2-1) のF分布に従う.

② U_2^2/U_1^2 は自由度対 (n_2-1, n_1-1) のF分布に従う.

→よって①②のうち **[実現値] > 1 となる方を検定統計量とする** ことにしておけば, 右側 (上側) の棄却域のみ調べれば済む!

▪ **自由度対** (k, l) のF分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $f_1^k(\alpha)$ は巻末の付表5・6で与えられている(ただし $\alpha = 0.05, 0.025$ の場合のみ).

- $(U_1^2 \text{の実現値}) > (U_2^2 \text{の実現値})$ のとき, $F = U_1^2/U_2^2$ とおき,

① $F \geq f_{n_2-1}^{n_1-1}(\alpha/2)$ なら H_0 を棄却.

② $F < f_{n_2-1}^{n_1-1}(\alpha/2)$ なら H_0 を採択 (棄却しない).

【重要】教科書pp.122 -123例題8 (訂正あり)

卒業試験における上位グループと下位グループの点数のバラツキに差異があるかどうか(母分散に差があるかどうか)を検定する問題。

- 上位8人の不偏分散 $U_1^2 = 28.6$
- 下位5人の不偏分散 $U_2^2 = 49.7$

★正規母集団は仮定されているとする(14章全体で仮定されている)。

$U_1^2 < U_2^2$ なので、 $F = U_2^2 / U_1^2$ を検定統計量として等分散の検定(帰無仮説 H_0 : 両グループの母分散は等しい)を行う

[例題8]解答

誤「これが自由度(7,4)のF分布に従う」←第5刷でも直ってない!

正「これが自由度対(4,7)のF分布に従う」

(右側の図14-11の説明も同様)

★以降は合ってます(表現にはやや難がありますが):

$$f_7^4(0.05/2) = f_7^4(0.025) = 5.52$$

$$[Fの實現値] = 49.7/28.6 = 1.73 < 5.52$$

より、 H_0 は棄却されず、バラツキに差異があるとは言えない。

(★「差異はないと結論づけられる」はちょっと言いすぎ)

第14章 V. 等分散の検定 (その8)

例題6の場合

	人数	平均値	不偏分散
男	20	74	3.4
女	17	65	3.8

$$F_0 = 3.8 / 3.4 = 1.12$$

有意水準 $\alpha = 0.05$ で等分散の検定を行なうと:

$$F_{19}^{16}(0.05/2) = F_{19}^{16}(0.025) > F_{20}^{16}(0.025) = 2.51$$

(↑ 単調性より)

$$\therefore 1.12 < 2.51 < F_{19}^{16}(0.025)$$

より $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は棄却できない.

よって母分散が異なるとは言えないので一応両母分散は等しいと見なすことができ、「分散が未知だが等しいことは既知」の場合の平均値の差の検定を行うことができる.

等分散の検定に関する補足

- 正規母集団の仮定はここでも必要！
- 一般に自由度対 (k, l) のF分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $f_k^l(\alpha)$ について, $f_k^l(1-\alpha) = 1/f_l^k(\alpha)$ が成り立つので, 左側の棄却域を調べることも可能(だが計算の手間が増えるだけなので普通はやらない).
- 「母分散が未知だが等しい場合の平均値の差の検定」の前段階として行う場合, 通常の検定問題と違い, 帰無仮説 (=「等分散仮説」) H_0 が棄却されないことを期待している.
 - 検定問題としては例外的なケース！
- **【再確認】** 仮説検定においては一般に, H_0 が棄却されなかったからといって H_0 の正しさが保証されるわけではない！
 - あくまで「否定できなかった」だけ.
- H_0 が棄却される場合は, 他の方法を用いなければならない.
→IV. 「3-母分散が未知で異なるとき」(今年度も割愛)

あらためて第14章 検定 の内容

- I. 検定
- II. 母平均の検定
- III. 母分散の検定 . . . 割愛しました
- IV. 平均値の差の検定
- V. 等分散の検定 . . . ここまで終わった
- VI. 比率の検定 . . . 次ここ
- VII. 適合度の検定
- VIII. 独立性の検定

VI. 比率の検定 (1)

[復習]「母集団比率に関する推測」とは

- ベルヌーイ母集団に関する推測.
 - 2項分布の応用.
 - ある程度大きな標本を扱うケースがほとんどなので, たいていは「2項分布の正規近似」を利用する.
- 「世論調査の類」. 支持率調査など, 身近に興味深い例が多い.
 - 「統計的な理解を深めるよいチャンス

★推定と検定の考え方の違いに注意!

VI. 比率の検定 (2)

2項分布の正規近似 RECALL

中心極限定理により, n が十分大きいとき,
 $B(n,p)$ は $N(np, np(1-p))$ で近似できる.

∴ $B(n,p)$ に従う確率変数は, $B(1,p)$ (という**同一の分布**)に従う**独立な** n 個の確率変数の**和**と見なせるから.

- 従って, 標本比率 $P=X/n$ の分布も,
正規分布 $N(p, p(1-p)/n)$ で近似できる.
- さらに P の標準化変数:

$$Z = (P-p) / \sqrt{p(1-p)/n}$$

は近似的に標準正規分布に従う.

- 分布が決まれば, 以降の考え方は他のケースと同じ.

ただし...

VI. 比率の検定 (3)

【重要】母比率の推測における推定と検定の違い

以下母比率を p , 標本比率 $P=X/n$ の実現値を P_0 とする.

- **推定**を行う際は,

$Z=(P-p)/\sqrt{p(1-p)/n}$ の分母(P の標準偏差)の p を近似値(推定値) P_0 で置き換えて計算.

すなわち信頼度 $\gamma=1-\alpha$ の信頼区間は以下のようにになった:

$$(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n}, P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n})$$

- ただし, 誤差の最大値を見積もりたいときは $p=0.5$ を採用.

これに対し

- **検定**の際は母比率 p の値が帰無仮説で(もちろん厳密な値として)与えられるので, 近似の必要がなく, 上のような置き換えはまったく無意味!

- $Z=(P-p)/\sqrt{p(1-p)/n}$ に, 標本比率 $P=P_0$ および帰無仮説で与えた $p=p_0$ の値をそのまま代入して実現値を計算し, 棄却/採択を判定すればよい.

- 仮説検定に対する理解の根本に関わる部分なので,

ここを間違える人は合格させません!

VI. 比率の検定 (4)

比率の検定(まとめ)

(1) [両側検定]

帰無仮説 $H_0: p = p_0$, 対立仮説 $H_1: p \neq p_0$
に対し, 有意水準 α で検定する場合,

$$Z = (P - p_0) / \sqrt{p_0(1 - p_0)/n}$$

とおくと, $|Z| \geq z(\alpha/2)$ のとき棄却される.

(2) [(右)片側検定]

帰無仮説 $H_0: p = p_0$, 対立仮説 $H_1: p > p_0$
に対し, 有意水準 α で検定する場合,

$Z \geq z(\alpha)$ のとき棄却される.

【重要】教科書pp.123-124 [例題9]

補習授業によって合格率が(全体の平均)75%より上がったかどうかを検定.

- 帰無仮説 $H_0: p = p_0 = 0.75$
- 対立仮説 $H_1: p > 0.75$ (下がることはないだろうから)
- 標本サイズ $n=103$, 標本比率 $93/103=0.91$.

検定統計量Zの実現値を求めると:

$$\begin{aligned} Z &= (P - p_0) / \sqrt{(p_0(1-p_0)/n)} \\ &= (0.91 - 0.75) / \sqrt{(0.75 \times (1 - 0.75) / 103)} \\ &= 3.75 \end{aligned}$$

$> z(0.05) = 1.64 \rightarrow$ よって棄却(補習の効果はあった)

★Zの分母において, p_0 に標本比率 $93/103=0.91$ を代入するのは**絶対にやってはいけない**誤り!

【参考】補習を受けた学生の合格率の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は:

$$(0.91 - z(\alpha/2)\sqrt{0.91(1-0.91)/103}, 0.91 + z(\alpha/2)\sqrt{0.91(1-0.91)/103})$$

(再) 平成14年度試験問題より

2002年10月1日付けの朝日新聞記事によれば、最近5年間の日本棋院のプロ公式戦15000局において、黒盤勝率は51.86%であった。

(2) 日本棋院は現行ルールでは先手が有利であるとしてルールの改正方針を決定した。この判断についてどう思うか。仮説検定の考えを用いて考察せよ。

★ 適当な有意水準(たとえば $\alpha = 0.05$)を設定して検定問題を解いてみましょう。

現行ルール(当時)において先手の勝つ確率を p とすると:

帰無仮説: $H_0 : p = 0.5$ (現行ルールは公平)

対立仮説: $H_1 : p \neq 0.5$ (現行ルールは不公平)

(とりあえず両側検定とした→理由を考えよ)

「メディカル・コメディカルの統計学」 (共立出版) より

p.82例題6.4

ある都市で、全有権者の中から500人をランダムに選んで現内閣を支持するか否かを聞いたところ、330人が支持すると答えた。

- (1) 母比率 p の95%信頼区間を求めよ。
- (2) 前回調査時の支持率を70%とするとき、今回の支持率は変化したといえるか、有意水準5%で検定せよ。

(★推定と両側検定の違いに注意！)

- (3) 前回までの支持率は70%に安定していたが、今回は諸般の事情から支持率の低下が取りざたされていた。今回支持率は低下したといえるか、有意水準5%で検定せよ。
- (4) 標本を何人にしたら、標本比率 P と母比率 p の差を2%以下に押さえることができるか。ただし信頼度は95%とせよ。

あらためて第14章 検定 の内容

- I. 検定
- II. 母平均の検定
- III. 母分散の検定 . . . 割愛しました
- IV. 平均値の差の検定
- V. 等分散の検定
- VI. 比率の検定 . . . ここまで終わった
- VII. 適合度の検定 . . . 次回ここから
- VIII. 独立性の検定