# 統計（医療統計）
# 第１０回　母平均の検定

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

# 第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定　・・・前回この途中まで
Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛します
Ⅳ．平均値の差の検定
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定
Ⅶ．適合度の検定
Ⅷ．独立性の検定

# [復習] 推定から検定へ

- もう数学的に重要な部分の大半は出尽くした．区間推定がわかっていれば検定も簡単！
  （のはず）
- 基本的なアイディアを正しく理解することが重要．
  - 計算だけなら中学生でもできるしパソコンがやってくれる
- 推定と検定を混同しないこと！
  - 単なる手法の違いというよりは，発想が根本的に異なる．

# [復習] 第14章　Ⅰ．検定

## 仮説検定とは

- （帰無）仮説：
  「事前の情報や経験から抱いている既存のイメージ」
- その（帰無）仮説を疑いたくなるような状況が生じたとする.
  - その「疑い」に基づく（帰無仮説を否定する）仮説を対立仮説という.
    （ただし単に「仮説」という場合は帰無仮説の方を指します）

- まず（帰無）仮説が正しいとして（本当は疑いつつ），推論を行う. 一種の背理法的思考.
  - ◎ 「矛盾を導く」代わりに「確率が非常に低い（0に近い）」ことを示すことによって帰無仮説を否定.
- 標本データから得た情報と（帰無）仮説に基づく推論の結果を照らし合わせ，仮説の真偽を判断する.

# ［復習］第14章　Ⅰ．検定

## 1−検定の原理

- p.113例１：「甲状腺疾患患者の10人の血清アルブミンを測定したら（その平均値が）健常人の（平均値の）60%しかなかったが，この疾患では血清アルブミンが低値になると断定してよいだろうか」
  - 標本の実現値と理論値（期待値）は一致しないのが普通だが，その差異がばらつきとして許容できる範囲内なのか，意味のある差異なのか，が問題．
    - 仮に90%なら：おそらく健常人のばらつきの範囲
    - 10%なら：明らかに異常 ⇒ どこかに判定上の境界があるはず！
  - 「減ることはない」と仮説（帰無仮説）を立て，この仮説が否定できるかどうかを調べる．
  - 確率の理論から言って正常なバラツキの範囲内とは考えられない差異があると判断できるとき，仮説は否定（棄却）され，「（差が）有意である」　「有意差がある」という．

- p.113例2：「サイコロを60回投げたら1の目が25回も出た．理論的には（すなわち期待値としては）1の目は10回（程度）出るはずである．この差異は大きすぎないだろうか」

  →「サイコロは正常」という（帰無）仮説を立て，「25回」が正常なサイコロのばらつきの範囲内かどうかを調べる．


S. TOKUNAGA

# [復習] 第14章　Ⅰ．検定

## 2-帰無仮説，対立仮説と2種類の過誤

- 最初に設定した仮説：帰無仮説．通常$H_0$で表す．
- 帰無仮説を否定したとき受け入れる仮説：
  対立仮説．通常$H_1$で表す．
- 帰無仮説$H_0$を否定することを，$H_0$を棄却するという．
- $H_0$が棄却されないとき，$H_0$を採択するという．
- さきほどの例1だと
  - $H_0$：「甲状腺疾患にかかっても血清アルブミンに変化はない」
  - $H_1$：「変化する」（もしくは「増える」,「減る」）
    - 医学的見地から増えることはあり得ないならば，$H_1$は「減る」としてもよい（→後述の「片側検定」の例）．

# [復習] 第14章　Ⅰ．検定

## 2-帰無仮説，対立仮説と2種類の過誤（続き）

- 第1種の過誤：本当は$H_0$が正しいのに$H_0$を棄却して$H_1$を採択してしまう.
  - 第1種の過誤を犯す確率を危険率あるいは有意水準といい，通常$\alpha$で表す.
    - 仮説検定では有意水準を事前に設定して推論を行う.
    - 習慣的に，$\alpha$＝0.05, 0.01とすることが多い.
- 第2種の過誤：本当は$H_0$が間違っているのに$H_0$を採択してしまう.
  - 第2種の過誤を犯す確率を通常$\beta$で表し，1－$\beta$を検出力という.
    - 仮説検定では多くの場合，$H_0$を棄却することによって何かを主張するので，検出力は高い方が望ましい.

# ［復習］ 第14章　Ⅰ．検定

## 注意と補足

- （あたりまえだが）仮説検定による判断は実際の真偽と一致するとは限らない．あくまで客観的・合理的な判断をするための1つの手法．
- 必然的に確率の評価を含んだ判断となる．
  - 判断の基準となる確率が有意水準
- 典型的な例・・・新薬や新しい治療法のテスト
  - まず「効果がない」という帰無仮説を立てて推論

→臨床試験のデータを分析した結果，帰無仮説を否定できれば，「効果がある」と判断できる．

# ［復習］第14章　Ⅰ．検定

<u>3−片側検定と両側検定</u>

棄却域：検定に用いる統計量（検定統計量）において，棄却することが決定される範囲．棄却域の補集合が採択域．

母数 $\theta$ に対し，帰無仮説を $H_0$ : $\theta = \theta_0$ とするとき，対立仮説 $H_1$ の立て方により以下のように分類：

- 両側検定：$H_1$ は $H_0$ の単純な否定，すなわち

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- 片側検定：$H_1$ は大小関係を考慮した $H_0$ の否定，すなわち

$$H_1 : \theta > \theta_0 \text{（右片側検定）または}$$

$$H_1 : \theta < \theta_0 \text{（左片側検定）}$$

  - 異なっているとすれば確実に大きい，あるいは小さいことが予測される（逆の可能性を無視してよいと考えられる）ときにはこちら．

★教科書p.114図14で棄却域の違いを確認．

★基本は両側検定．片側検定では明確な根拠が示されるべき．

## ［復習］第14章　Ⅰ．検定

### 4−検定の手順

① 帰無仮説$H_0$，対立仮説$H_1$，有意水準 $\alpha$ を定める．
② 標本から統計量（検定統計量）を求める．
③ 検定統計量の分布を調べ，その実現値が棄却域に入るかどうか調べる．
④ 棄却域に入れば$H_0$を棄却して$H_1$を採択，入らなければ$H_0$を採択．

【注意】$H_0$が棄却できなかったとき，便宜上「$H_0$を採択」というが，「棄却できない」ことは「$H_0$の正しさ」を積極的に主張するものではない！

- 単に「否定はできなかった」ということ．仮に$H_0$が間違っていても，検定統計量が”たまたま”採択枠に入ることは十分あり得る．
- 「背理法で証明しようとしたら矛盾が導けなかった」ようなもの．ある意味検定の”失敗”．
- 【追記】棄却されないとき，「保留」という言葉も使われるようです．（「採択」よりは実際のニュアンス的に近い）

# [復習] 第14章　II. 母平均の検定

母平均 $\mu$ に関して

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$

を検定する.

- 通常, $H_0$ が正しくないことを期待して行う.
- とりあえず正規母集団を仮定.
  - 【注意】一般に, 母集団分布として特定の分布(正規分布など)を仮定して行う検定をパラメトリック検定, そうでないものをノンパラメトリック検定という. この授業では主にパラメトリック検定を扱う(したがって必然的に, 母集団分布の仮定には常に留意する必要がある).
- 以下, 標本サイズを $n$, 標本平均を $X'$, 有意水準を $\alpha$ とする

1-母分散が既知のとき

母分散を $\sigma^2$ とする. $X'$ の標準化変数 $Z=(X'-\mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ が(正規母集団の仮定のもとでは厳密に)標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので, これを検定統計量とする.

両側検定の場合(対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$):

- $|Z| \geqq z(\alpha/2)$ ならば $H_0$ を棄却.
- $|Z| < z(\alpha/2)$ ならば $H_0$ を棄却しない(採択).

(前回このあたりまで)

# 第14章　Ⅱ．母平均の検定

1−母分散が既知のとき（続き）

【注意（教科書への補足）1】

- 以上は標本平均の標準化変数 Z を検定統計量とした場合.
- 標本平均X’そのものを検定統計量としてX’の棄却域を考えるなら

$$P(-z(\alpha/2) \leqq Z \leqq z(\alpha/2)) = \gamma\ (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P(\mu_0 - z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n} \leqq X' \leqq \mu_0 + z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n}) = \gamma$$

となるから,

$$(\mu_0 - z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n}\ ,\ \mu_0 + z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n})$$

がX’の採択域で、この外が棄却域.

- RECALL:「$\mu$の100(1−$\alpha$)%信頼区間」は

$$(X' - z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n}\ ,\ X' + z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n})$$

だった. すなわち両側検定の場合, 有意水準100$\alpha$%でのX’の採択域は, $\mu$の100(1−$\alpha$)%信頼区間を平行移動したものであり,

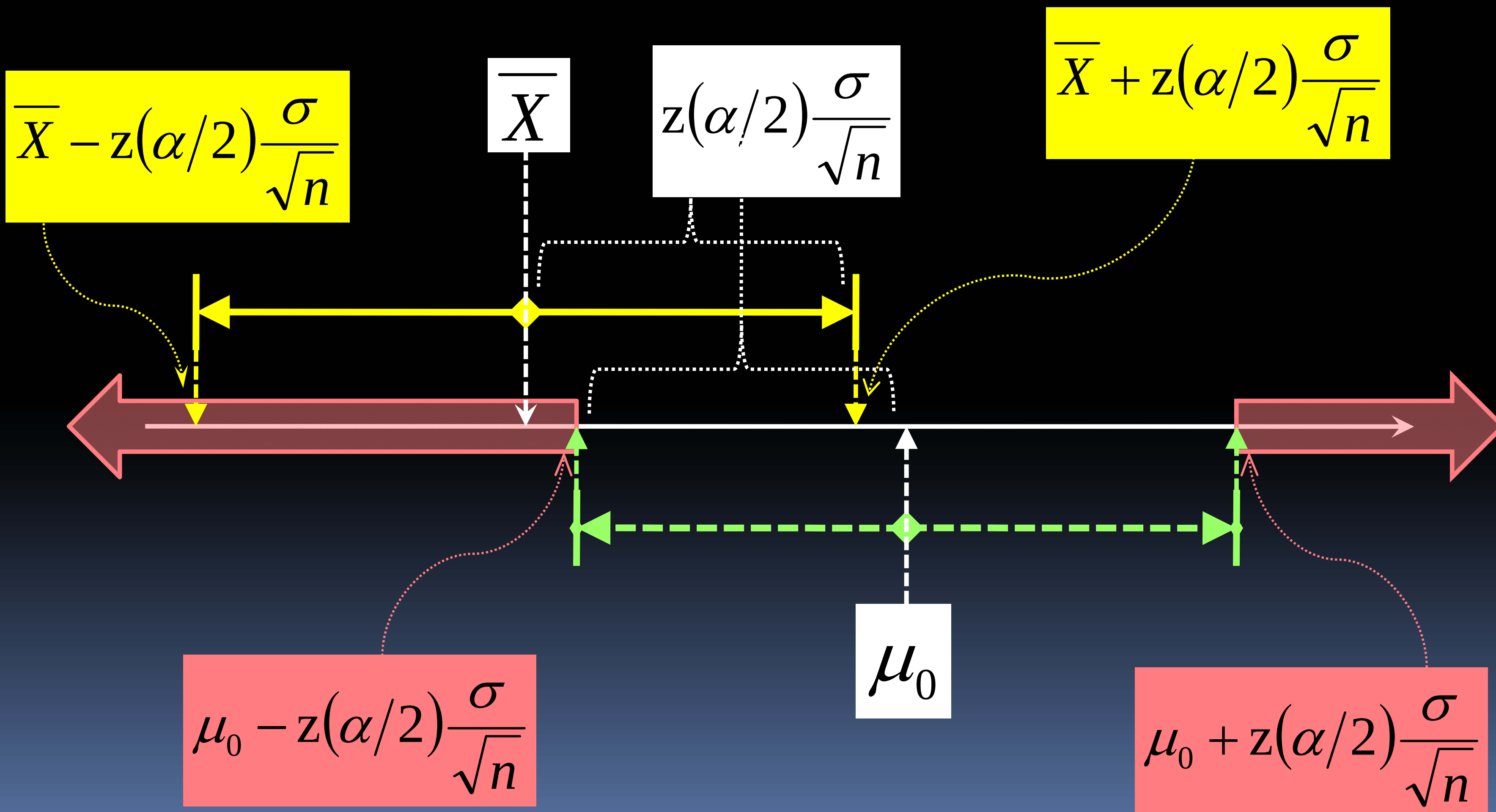
  - 「$\mu_0$が$\mu$の100(1−$\alpha$)%信頼区間に入る」こと と
  - 「X’の実現値が有意水準$\alpha$での採択域に入る」こと

が同値.

（つまり区間推定をやれば両側検定の結果もわかる！）

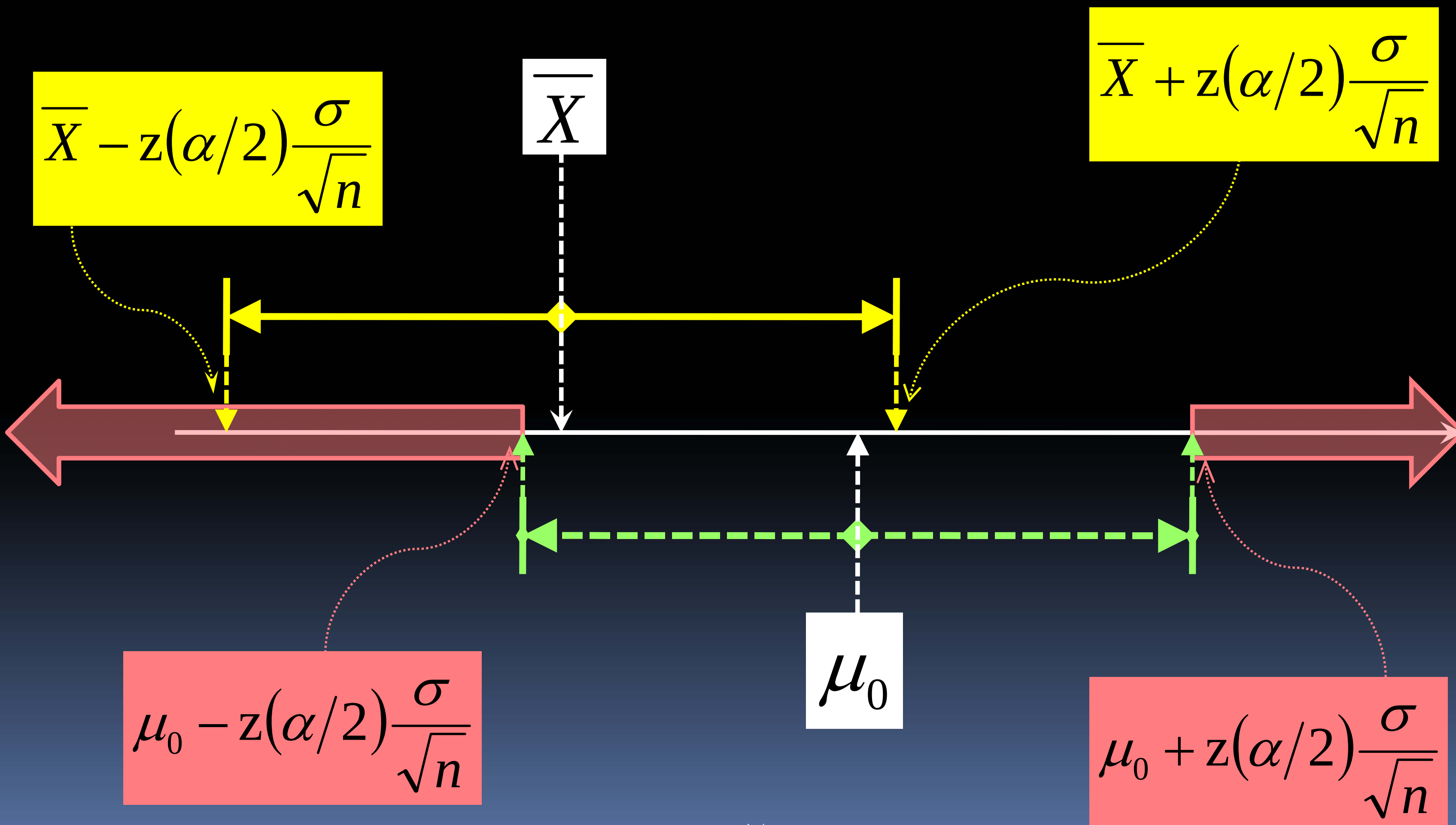
# 100（1－α）％信頼区間と有意水準αの両側検定における採択域・棄却域の関係（1）
## （母分散既知・標本平均を検定統計量とした場合）

$\left|\overline{X}-\mu_0\right| > z(\alpha/2)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ のとき → $H_0$: $\mu = \mu_0$ は**棄却**



# 100（１－α）％信頼区間と
# 有意水準αの両側検定における採択域・棄却域の関係（２）
## （母分散既知・標本平均を検定統計量とした場合）

$\boxed{\left|\overline{X}-\mu_0\right| < \mathrm{z}(\alpha/2)\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{のとき}}$ → $\mu=\mu_0$は**棄却されない**



# 第14章　Ⅱ．母平均の検定

## 1−母分散が既知のとき(さらに続き)

【注意(教科書への補足)2】

- 片側検定の場合
  - 対立仮説$H_1$：$\mu > \mu_0$(右片側検定)のときは
    「①$Z \geqq z(\alpha)$で棄却，②$Z < z(\alpha)$で採択」
  - 対立仮説$H_1$：$\mu < \mu_0$(左片側検定)のときは
    「①$Z \leqq -z(\alpha)$で棄却，②$Z > -z(\alpha)$で採択」
- 正規母集団の仮定がなくても，標本サイズがある程度大きければ**標本平均の分布は**正規分布で近似でき，同様に検定できる(区間推定のときと同じ)

# 第14章　Ⅱ．母平均の検定

p.115例題1（母分散が既知のとき）

副甲状腺機能低下症の患者における，血清カルシウムの平均値$\mu$を検定する問題.

- 標本サイズn＝16（人），標本平均7.4mg/dl
- 健常人の場合：
  - 平均9.8mg/dl　・・・　帰無仮説で用いる値
  - 標準偏差0.5mg/dl　・・・　既知の母標準偏差として採用
  - 正規分布　・・・　検定対象も正規母集団と考える

［解答］

帰無仮説$H_0$: $\mu$ ＝9.8mg/dl（健常者と同じ）

対立仮説$H_0$: $\mu$ ≠9.8mg/dl（健常者と異なる・両側検定）

検定統計量：標本平均X’の標準化変数 $Z=(X'-\mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$

Zの実現値＝・・・＝－19.2＜－1.96＝－z(0.025)より棄却.

よって血清カルシウムの数値（平均値）は低くなると結論づけられる.

- 【追加問題1】片側検定なら？
  （解答：－z(0.05)＝－1.645 と比較し，やはり棄却）←計算せずともわかる！
- 【追加問題2】標本平均X’を検定統計量とした場合の X’の棄却域は？
- 【追加問題3】母平均の95%信頼区間は？それと検定問題との関係は？

# 第14章　Ⅱ．母平均の検定

## 2−母分散が未知のとき

（★標本サイズが大きければ正規分布に帰着させて解くことができるのは推定の場合と同じ）

標本の不偏分散を$U^2$とする.

$$T=(X'-\mu_0)/(U/\sqrt{n})$$（スチューデント比）

が自由度n−1のt分布に従うので，これを検定統計量として、

両側検定の場合：

① $|T| \geqq t_{n-1}(\alpha/2)$ならば $H_0$を棄却.

② $|T| < t_{n-1}(\alpha/2)$ならば $H_0$を棄却しない（採択）.

# 第14章　Ⅱ．母平均の検定

2−母分散が未知のとき（続き）

【注意（教科書への補足）】

- t分布を用いるので正規母集団の仮定は必須.

（以降は母分散既知の場合と同様）

- 片側検定なら（対立仮説$H_1$ が$\mu > \mu_0$または$\mu < \mu_0$）
  「①$T \geqq t_{n-1}(\alpha)$で棄却，②$T < t_{n-1}(\alpha)$で採択」（$H_1 : \mu > \mu_0$）
  または
  「①$T \leqq -t_{n-1}(\alpha)$で棄却，②$T > -t_{n-1}(\alpha)$で採択」（$H_1 : \mu < \mu_0$）

- 標本平均X’を検定統計量としてX’の棄却域を考えるなら

$$P( t_{n-1}(\alpha/2) \leqq T \leqq t_{n-1}(\alpha/2)) = \gamma\ (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P( \mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2)\,U/\sqrt{n} \leqq X' \leqq \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2)\,U/\sqrt{n}) = \gamma$$

となるから，

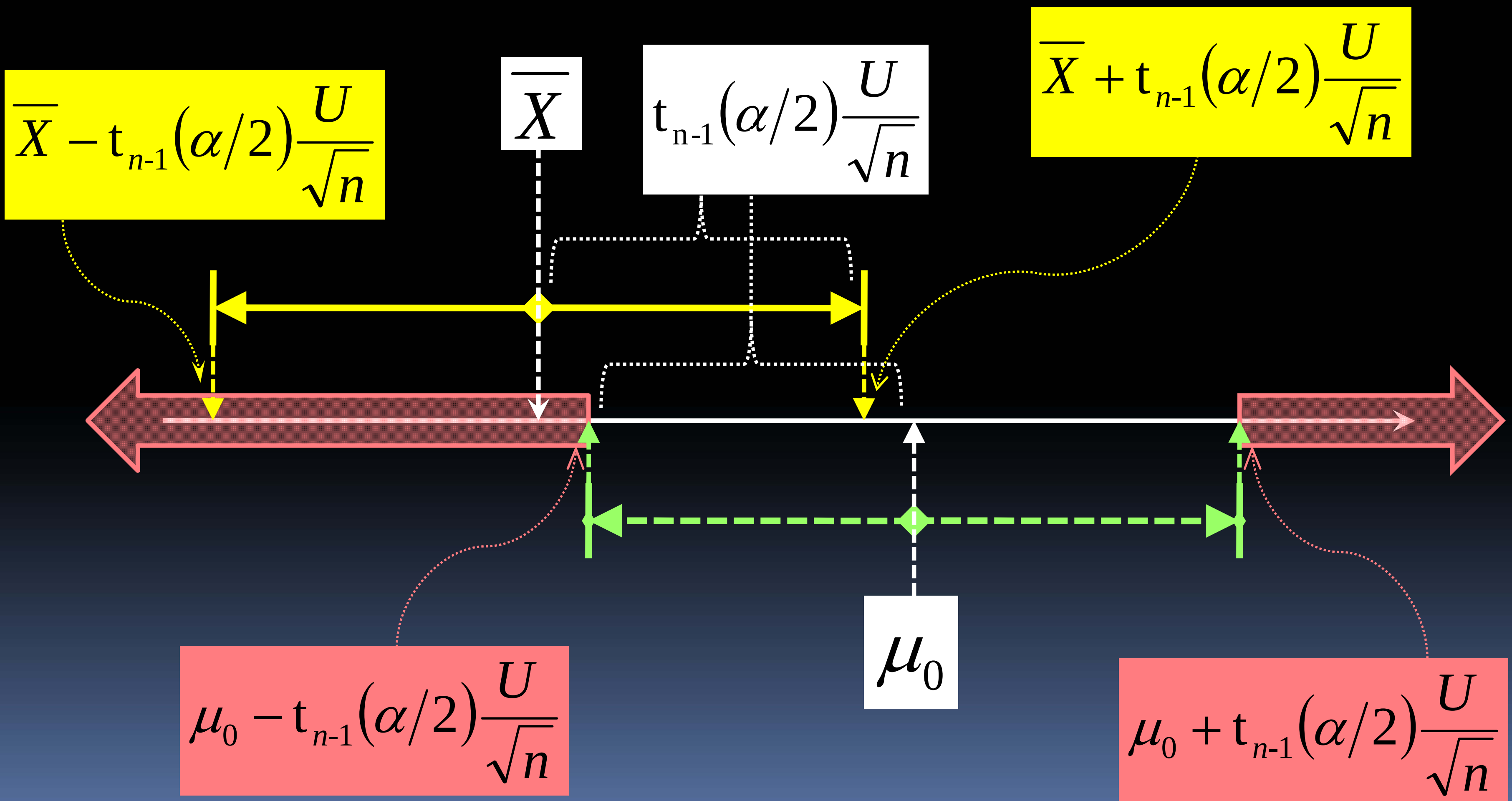
$$( \mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2)\,U/\sqrt{n}\ ,\ \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2)\,U/\sqrt{n})$$

が X’の採択域で、この外が棄却域.

- 両側検定の場合，「有意水準100$\alpha$%でのX’の採択域」と「$\mu$の100(1−$\alpha$)%信頼区間」が平行移動の関係にあるのは母分散既知の場合と同様.

# 100（1－α）%信頼区間と有意水準αの両側検定における採択域・棄却域の関係（1）（母分散未知・標本平均を検定統計量とした場合）

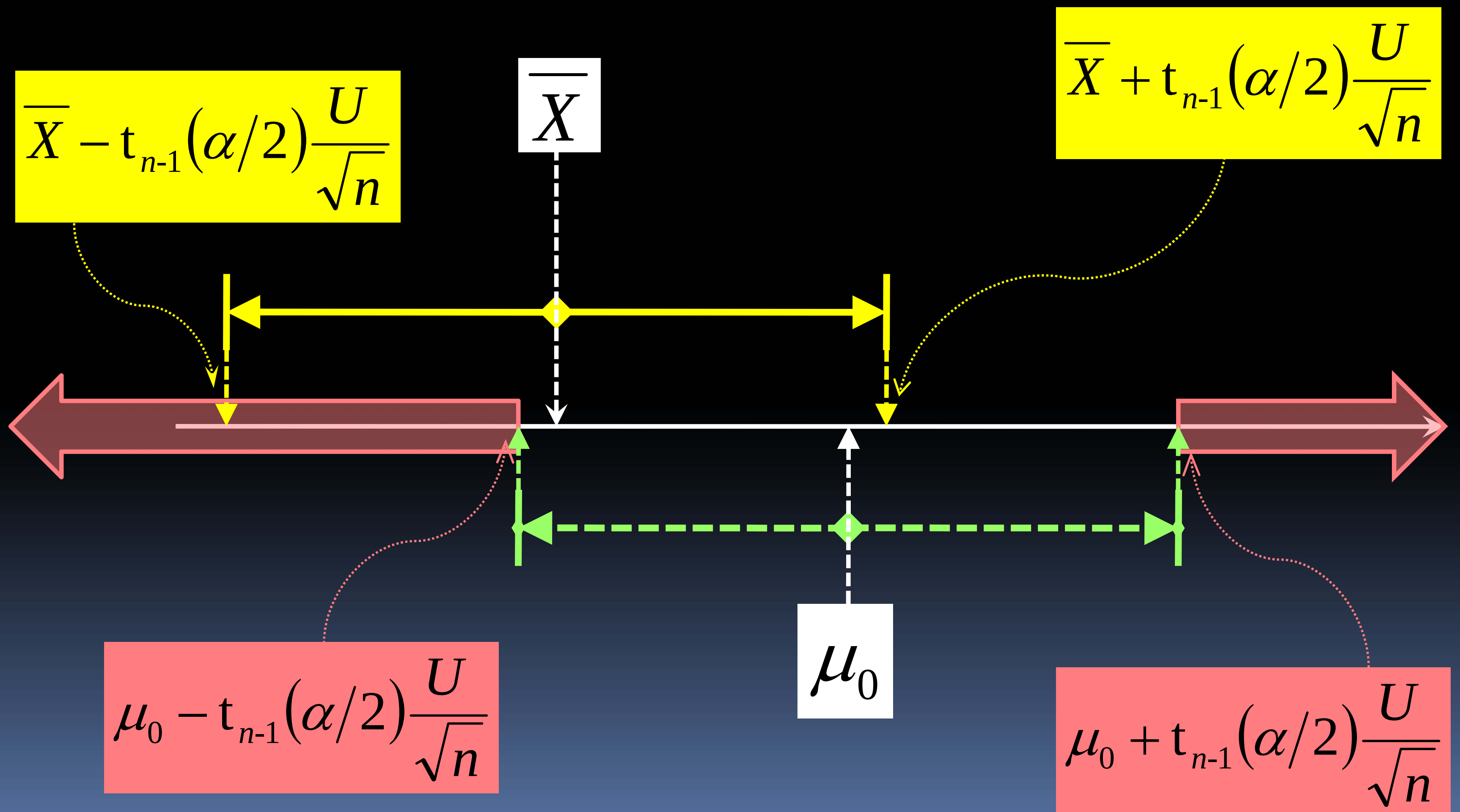
$\boxed{\left|\overline{X}-\mu_0\right| > \mathrm{t}_{n-1}(\alpha/2)\dfrac{U}{\sqrt{n}}\text{のとき}}$ → $H_0$: $\mu = \mu_0$は**棄却**



# 100（1－α）％信頼区間と
# 有意水準αの両側検定における採択域・棄却域の関係（2）
## （母分散未知・標本平均を検定統計量とした場合）

$$\left|\overline{X}-\mu_0\right| < \mathrm{t}_{n\text{-}1}(\alpha/2)\frac{U}{\sqrt{n}}\text{のとき}$$

→ $H_0: \mu = \mu_0$は**棄却されない**



# あらためて第14章　検定　の内容

Ⅰ．検定

Ⅱ．母平均の検定　・・・ここまで終わった

Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛します

Ⅳ．平均値の差の検定　←次ここ

Ⅴ．等分散の検定

Ⅵ．比率の検定

Ⅶ．適合度の検定

Ⅷ．独立性の検定

# 第14章 Ⅳ. 平均値の差の検定

2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

に関して，これらの母集団の平均値が等しいかどうかを調べる.
すなわち,

$$帰無仮説H_0: \mu_1 = \mu_2$$

を検定する.

1−母分散が既知のとき（あまり現実的ではないが・・・）
2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とする（$\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$は既知）.

- 標本平均をそれぞれ X’, Y’ とすると

$$X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1), Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$$


S. TOKUNAGA

# 第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

1−母分散が既知のとき（続き）

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$より

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \ \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$$

- よって標準化変数：

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2\}}$$

  が N(0,1)に従う.
- 分布さえ決まってしまえば，あとの手順はⅡ．でやった検定と同様！
- 【注意1】帰無仮説$H_0$：$\mu_1 = \mu_2$のもとでは $\mu_1 - \mu_2 = 0$ なので，「$-(\mu_1 - \mu_2)$」を省略した統計量を考えればよい．
- 【注意2】教科書には

  両側検定（対立仮説$H_1$：$\mu_1 \neq \mu_2$）

  の場合しか載っていないが，**事前に**大小関係を予測する根拠があれば

  片側検定（$H_1$：$\mu_1 > \mu_2$ または$H_1$：$\mu_1 < \mu_2$）

  も当然あり得る.

# 第14章　Ⅳ．平均値の差の検定

1−母分散が既知のとき（補足）

特に$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$（すなわち等分散）のときは

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1)$，$Y' \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$

  より

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2))$$

- よって標準化変数：

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

  が N(0,1)に従う.

  （注：帰無仮説のもとでは $\mu_1 - \mu_2 = 0$ なので，「$-(\mu_1 - \mu_2)$」は消える）

★次にやる「2−母分散が未知だが等しいことは既知のとき」と比較せよ.

# 第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

1−母分散が既知のとき（補足）

母分散既知で等分散の場合についてまとめると以下の通り：
（標本平均X’, Y’ の実現値をそれぞれ x’, y’ とする ）

（1）［両側検定］$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$ ，対立仮説$H_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$
に対し，有意水準$\alpha$で検定するとき，

$$z := (x' - y') / \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}$$

とおくと，

$|z| \geqq z(\alpha/2)$ のとき$H_0$が有意水準$\alpha$で棄却される．

（2）［（右）片側検定］$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$ ，対立仮説$H_1$: $\mu_1 > \mu_2$
に対し，有意水準$\alpha$で検定するとき，

$z \geqq z(\alpha)$ のとき$H_0$が有意水準$\alpha$で棄却される．

# 第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき

次の定理を用いる（教科書では詳しく説明されていないので注意！）:

**定理**

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1,\ \sigma^2),\ N(\mu_2,\ \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\},\ \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とし，これらの標本の平均，不偏分散をそれぞれX'，Y' $U_1^2$, $U_2^2$ とする．

このとき，確率変数

$$T:=\{(X'-Y')-(\mu_1-\mu_2)\}/\sqrt{\{S_p^2(1/n_1+1/n_2)\}}$$

は自由度$n_1+n_2-2$ のt分布に従う．

ただし，$S_p^2$は$U_1^2$, $U_2^2$の**統合分散**と呼ばれ，

$$S_p^2 := \{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2\}/(n_1+n_2-2)$$

$$= \{\Sigma(X_i-X')^2+\Sigma(Y_i-Y')^2\}/(n_1+n_2-2)$$

# 第14章 Ⅳ. 平均値の差の検定

2−母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

【注意1】

$$T=\{(X'-Y')-(\mu_1-\mu_2)\}/\sqrt{\{S_p^2(1/n_1+1/n_2)\}}$$

と，母分散（$\sigma^2$）既知の場合の

$$X'-Y' \sim N(\mu_1-\mu_2,\ \sigma^2/(1/n_1+1/n_2))$$

の標準化変数:

$$Z=\{(X'-Y')-(\mu_1-\mu_2)\}/\sqrt{\{\sigma^2(1/n_1+1/n_2)\}}$$

の類似に注意.

母分散$\sigma^2$が統合分散

$$S_p^2=\{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2\}/(n_1+n_2-2)$$

に置き換わっただけ.

# 第14章 Ⅳ. 平均値の差の検定

## 2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

統合分散の意味するところ:

$$S_p^2 = \{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2\} / (n_1+n_2-2)$$
$$= \{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2\} / \{(n_1-1)+(n_2-1)\}$$

であるから，$U_1^2$, $U_2^2$の重み付き平均とみなすこともできる.

ここで

$E(S_p^2)$

$$= \{(n_1-1)E(U_1^2)+(n_2-1)E(U_2^2)\} / \{(n_1-1)+(n_2-1)\})$$
$$= \{(n_1-1)\sigma^2+(n_2-1)\sigma^2\} / \{(n_1-1)+(n_2-1)\}$$
$$= \sigma^2$$

より，$S_p^2$は$\sigma^2$の不偏推定量になっている.


S. TOKUNAGA

# 第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

## 2−母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

【注意2】

- 定理の証明は割愛．とりあえず内容をよく理解して使えればよいです．
- 等分散の仮定は本質的．
- 帰無仮説$H_0$：$\mu_1 = \mu_2$のもとでは
  $\mu_1 - \mu_2 = 0$ なので，「 −（$\mu_1 - \mu_2$）」を省略した統計量を考えればよい．
  （母分散既知のケースと同様）

# 第14章　Ⅳ．平均値の差の検定

## 2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき(まとめ)

標本平均X’, Y’ の実現値をそれぞれ x’, y’ とする．

自由度$\nu = n_1 + n_2 - 2$とおく.

(1)［両側検定］

帰無仮説$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$，対立仮説$H_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$

に対し，有意水準$\alpha$で検定するとき，

$$t_0 := (x' - y') / \sqrt{ s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2) }$$

(すなわち定理のTの実現値)とおくと，

$| t_0 | \geqq t_\nu(\alpha/2)$のとき$H_0$が有意水準$\alpha$で棄却される.

(2)［(右)片側検定］

帰無仮説$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$，対立仮説$H_1$: $\mu_1 > \mu_2$

に対し，有意水準$\alpha$で検定するとき，

$t_0 \geqq t_\nu(\alpha)$のとき$H_0$が有意水準$\alpha$で棄却される.

## 14章Ⅳ．への補足：「対応のある2標本」の平均値の差の検定（１）

- 教科書では，いずれも独立な（対応のない）2標本に関する問題を扱った．
  - 「対応のある2標本」⇔「独立な2標本」
- 現実には「対応がある2標本」として扱うべきケースも多い．
  - 何組かの一卵性双生児の対を用いてデータを取る．
  - マラソン走者のスタート前とゴール直後の体重の差をデータにする．
  - 同一被験者の投薬前と投薬後のデータを比較する．
  - etc.
- 2標本ではあるが，対データの差をデータとして解析を行うので，実質的には1標本問題．
  - 「独立な2標本」の場合よりずっと単純！
  - 多くの教科書では「独立な２標本」の場合と対にして扱っています．

# 14章IV．への補足：「対応のある2標本」の平均値の差の検定（２）

- 母分散未知のケースを考える.

  →t分布の利用(正規母集団の仮定が必要).
- n個の対をなす標本データ$(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, … ,$(x_n,y_n)$から, 各対の差の値

  $$d_1 = x_1 - y_1,\ d_2 = x_2 - y_2,\ \cdots,\ d_n = x_n - y_n$$

  を算出.
- 2つの母平均をそれぞれ$\mu_1$, $\mu_2$とし,

  $d' = \sum d_i / n$ , $U^2 = \sum (d_i - d')^2 / (n-1)$とおくと

  $$T := (d' - (\mu_1 - \mu_2)) / (U / \sqrt{n})$$

  が自由度n-1のt分布に従う.
- 以下はこれまでと同じ要領.

# 14章IV．平均値の差の検定に関する補足（その3）

「対応のある2標本」に関する推定・検定（まとめ）

（1）［区間推定］母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の信頼係数 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\left( d' - t_{n-1}(\alpha/2)U/\sqrt{n},\ d' + t_{n-1}(\alpha/2)U/\sqrt{n} \right)$$

（2）［両側検定］

帰無仮説$H_0$: $\mu_1 - \mu_2 = 0$，対立仮説$H_1$: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ に対し，有意水準$\alpha$で検定する場合，

$$t_0 := d'/(U/\sqrt{n})$$

とおくと，$|t_0| \geqq t_{n-1}(\alpha/2)$のとき$H_0$が有意水準$\alpha$で棄却される．

（3）［（右）片側検定］

帰無仮説$H_0$: $\mu_1 - \mu_2 = 0$，対立仮説$H_1$: $\mu_1 - \mu_2 > 0$ に対し，有意水準$\alpha$で検定する場合，$t_0 \geqq t_{n-1}(\alpha)$のとき$H_0$が有意水準$\alpha$で棄却される．

# あらためて第14章　検定　の内容

Ⅰ．検定

Ⅱ．母平均の検定　・・・今回この途中から

Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛しました

Ⅳ．平均値の差の検定　・・・ここまで終わった

Ⅴ．等分散の検定

Ⅵ．比率の検定

Ⅶ．適合度の検定

Ⅷ．独立性の検定