統計（医療統計）

前期・第４回　確率変数と確率分布（２）

授業担当:徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

もういちど Overview

- 確率（9章：6ページ）・・・第1回授業
- 記述統計（10章： 4 ページ）・・・第2回授業

確率モデル（11章:18ページ）・・・第3回～

- 推測統計（13章:7ページ, 14章:15ページ）
  - 推定（点推定、区間推定）
  - 仮説検定

（注：前期は推測統計のさわりまで）

第11章　確率変数と確率分布

Ⅰ．　確率変数と確率分布の定義

1-確率変数の定義　　　　　・・・　離散型と連続型

2-離散型確率変数の確率分布

3-連続型確率変数の確率分布　　　・・・　確率密度関数

Ⅱ．　確率変数の特性値

1-期待値と分散・標準偏差の定義

2-確率変数の期待値と分散の性質　・・・期待値の加法性

＊＊＊前回この辺まで＊＊＊

3-確率変数の標準化

Ⅲ．　確率変数の独立性（←前回も少し触れた）

Ⅳ．　代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など

Ⅴ．　中心極限定理と正規近似

Ⅵ．　標本分布

[復習] Ⅰ．確率変数と確率分布の定義（1）

1-確率変数の定義

［定義］標本空間Ω上の実数値関数（各根元事象に実数を対応させたもの）を **確率変数** random variable という.

- とり得る値が離散的→離散型確率変数
- とり得る値が連続的→連続型確率変数

[復習]　Ⅰ．確率変数と確率分布の定義（2）

教科書p.83例1

Ω：サイコロを振ったときの，目の出方で定まる 事象全体の集合.

- 「サイコロを振って1の目が出る」は 事象.
- 「サイコロを振って i の目が出る」という 事象 ω_i に整数 i を対応させる 関数 を X(＝X(ω_i)) とおくと，Xは(離散型)確率変数　となる.
- 確率変数Xに対し，
  - 「X＝1」「X≦4」
  - 「Xは偶数」

  などは事象.

[復習] Ⅰ．確率変数と確率分布の定義（3）

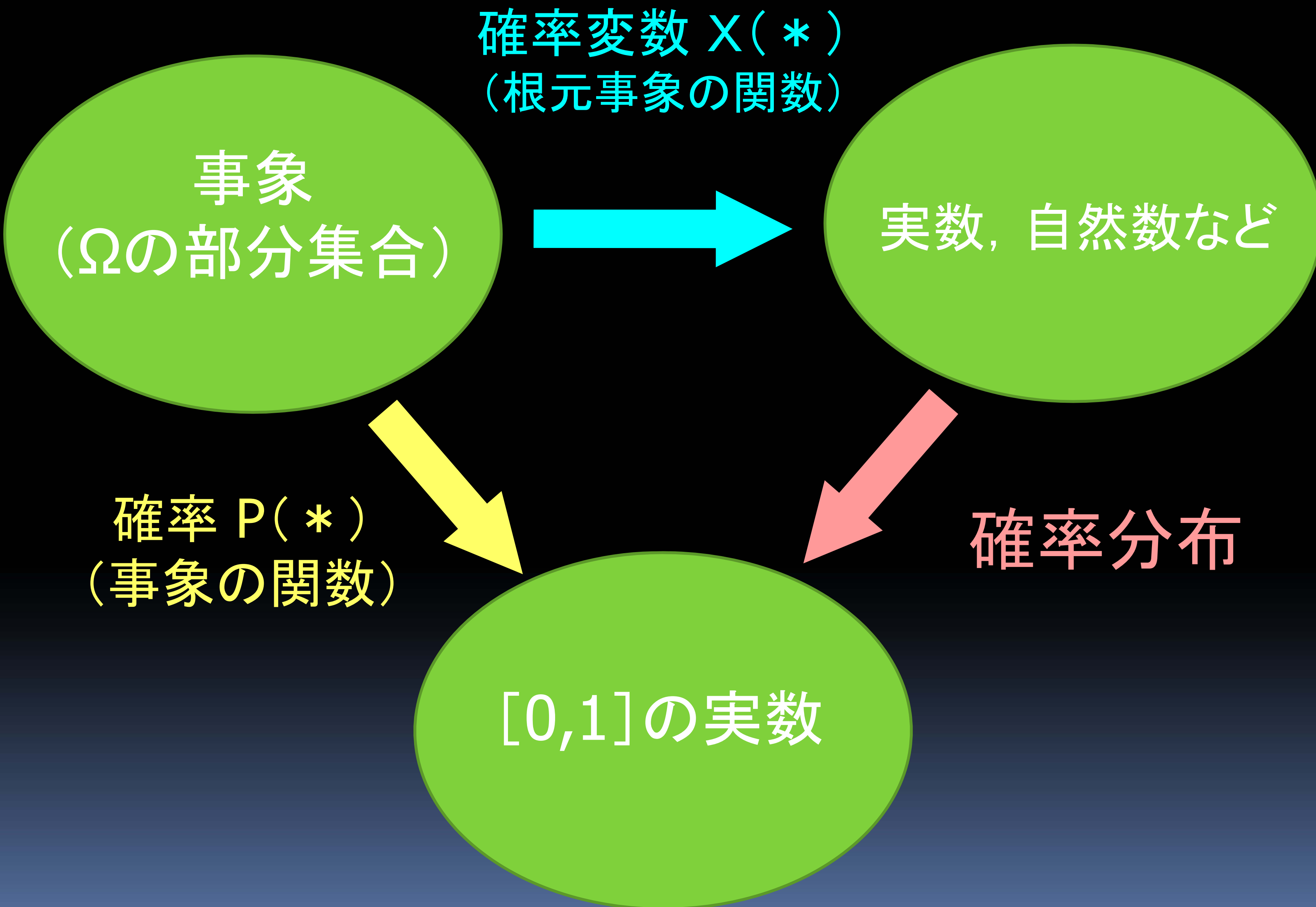
2−離散型確率変数の確率分布

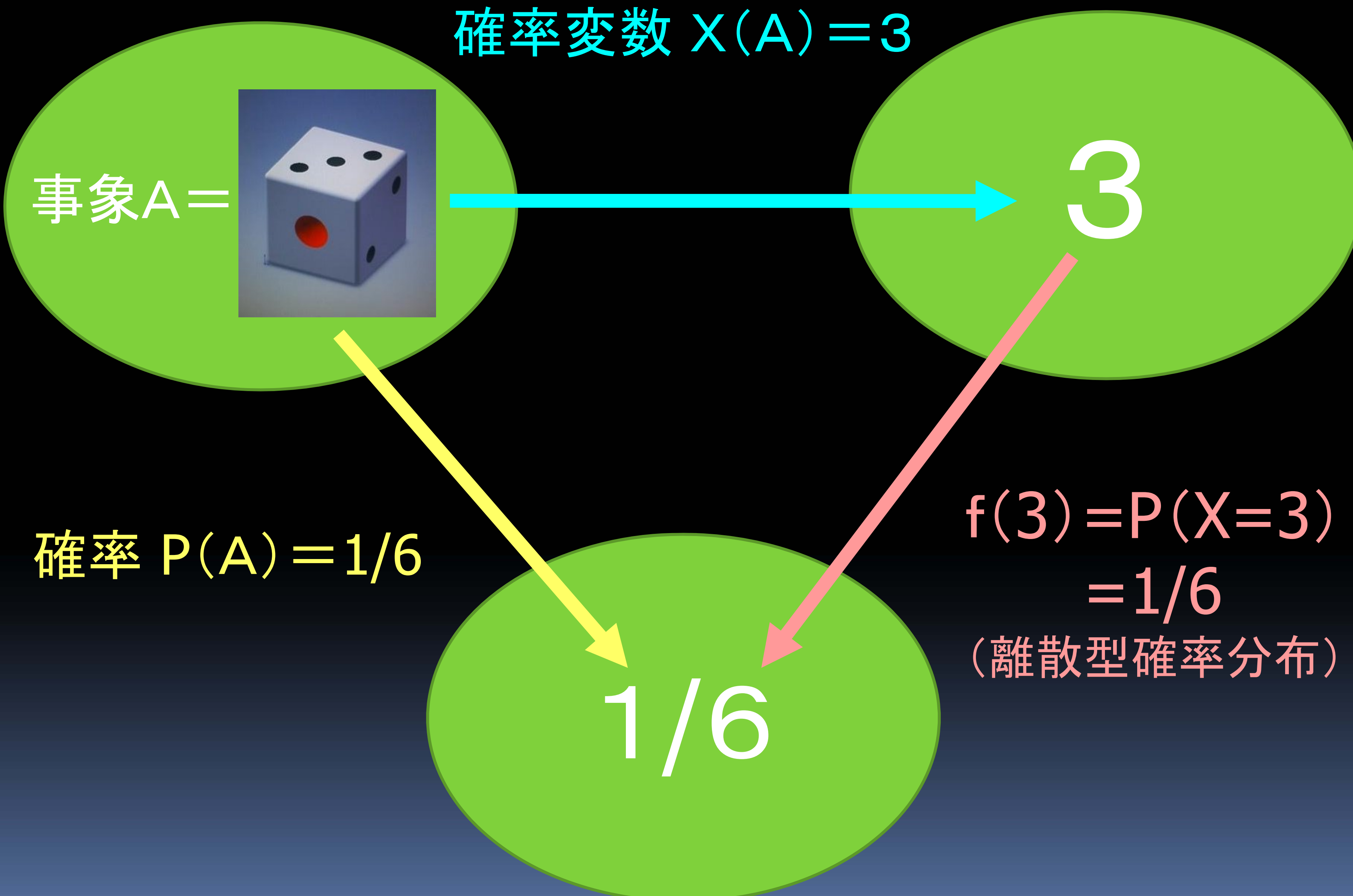
[定義]離散型確率変数Xのとる値xと，Xがその値をとる確率
P(X=x)との対応関係を(Xの)確率分布という.

教科書p.84例3
X：サイコロを1回振ったときの目の値.
Xの確率分布（離散型）：

k	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

★関数 f(x)=P(X=x) を「Xの確率分布」とよんで差し支えない。


確率変数 X(＊)
（根元事象の関数）
事象
（Ωの部分集合）
実数，自然数など
確率 P(＊)
（事象の関数）
確率分布
[0,1]の実数


確率変数 X(A)＝3
事象A＝
3
確率 P(A)＝1/6
f(3)=P(X=3)
=1/6
(離散型確率分布)
1/6

[復習]　Ⅰ．確率変数と確率分布の定義（4）

<u>離散型確率変数の性質：</u>

離散型確率変数Xの取り得る値を$x_1, x_2,$ ・・・とする.

f(x) = P（X=x）とおくと, f は確率の性質（公理）より

$$f(x_k) \geqq 0 \ (k=1,2,\cdots) \text{ かつ } \sum f(x_k)=1$$

を満たすことがただちに導ける.

次に連続型確率変数へ

[復習] Ⅰ．確率変数と確率分布の定義（5）

3-連続型確率変数の確率分布

教科書p.83例2：

「ある短大の1年生から無作為に選んだ1名の身長」をXcmとすると，Xは連続型確率変数．

（とり得る値が連続的になっただけ）

では、

Xが連続型確率変数のとき，離散型の場合と同様に

「確率変数Xのとる値xと，確率P(X=x)との対応関係」

（もしくは関数 f(x)=P(X=x) そのもの）

を（連続型）確率分布と呼んで良いだろうか？

[復習]　Ⅰ．確率変数と確率分布の定義（6）

そもそも

「連続型確率変数Xと確率との対応関係」

とは？

［注意］Xが連続型確率変数のとき，

（特殊な例を除き）ほとんどすべての値xに対して

$P(X=x)=0$である！

つまり

[復習]　Ⅰ．確率変数と確率分布の定義（7）

連続型確率分布は
$f(x)=P(X=x)$のような関数で表すことはできない.

そこでこれに代わるものとして確率密度関数を導入.
［定義］

$f(x) \geqq 0$, $\int_{-\infty \leqq x \leqq \infty} f(x)dx = 1$であり,

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_{a \leqq x \leqq b} f(x)dx$$

であるような関数 f を, 連続型確率変数Xの
確率密度関数という.
★すなわち連続型確率分布は, 確率密度関数により表される.

[復習] 連続型確率分布の例

<u>教科書p.85例4〈一様分布〉</u>

a,bを定数とするとき，密度関数

f(x)＝P(X=x)＝1/(b−a)　(a≦x≦b)
f(x)＝P(X=x)＝0　(x＜aまたはx＞b)

であらわされる確率分布を一様分布という.

- このときXは一様確率変数または一様乱数
- EXCEL課題で用いるRAND関数は a=0, b=1 とした一様乱数.

[復習] Ⅰ．確率変数と確率分布の定義（8）

[注意]

$F(x) = P(X \leqq x)$

をXの累積分布関数という.

- 図11-1(b), 11-2(b)でイメージをつかんでください.
- 「累積」を省略して分布関数と呼ばれることも多く, 紛らわしいので気をつけましょう.
- Excelの関数「BINOMDIST」で4つ目の引数を「TRUE」にした場合がこれに相当
  （→Excel実習の際に確認を）

[復習]　Ⅱ．確率変数の特性値（1）

1−期待値と分散・標準偏差の定義

確率変数Xの平均（＝期待値expectation）E(X)

を次式で定義：

$E(X) := \sum x_k P(X = x_k)$　　（Xが離散型）

$E(X) := \int x f(x) dx$　　（Xが連続型）

（ただしf(x)はXの確率密度関数）

Xの値を繰り返し取り出したとき，それらの平均値は回数を増やすほど E(X) に近づくと考えられる

[復習]　Ⅱ．確率変数の特性値（2）

$\mu = E(X)$とするとき，
確率変数の分散variance$V(X)$を

$$V(X) := E((X-\mu)^2)$$

で定義．すなわち，

- $V(X) = \sum (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$（Xが離散型）
- $V(X) = \int (x - \mu)^2 f(x)\,dx$（Xが連続型）

分散$V(X)$は，Xのばらつき，変動の指標となる．
$V(X) = \sigma^2$と表すことも多い．

- Xの標準偏差standard deviation：

$$\sigma = \sigma(X) := \sqrt{\sigma^2}$$

[復習]　Ⅱ.確率変数の特性値（3-5）

2−確率変数の期待値と分散の性質

（以下Xは確率変数, a, b は定数）

期待値(平均)Eの性質:

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

分散の性質:

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

分散の公式: ★教科書には載っていません.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

[復習]　Ⅱ．確率変数の特性値（6）

教科書p.87例5

X: サイコロを1回振ったときの目の値　とする.

Xの確率分布（離散型）:

k	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E(X) = \sum kP(X=k) = (1+2+\cdots+6)/6 = 7/2 = 3.5$

$V(X) = \sum (k-3.5)^2 P(X=k)$

$= ((1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + \cdots + (6-3.5)^2)/6$

$= 35/12 = 2.916666\cdots$

[復習] 教科書p.87問題4

Z: サイコロを2回振ったときの目の和の値　とする.
このときZの確率分布(離散型)は:

k	2	3	4	･･･	7	8	･･･	12
P(X=k)	1/36	2/36	3/36	･･･	6/36	5/36	･･･	1/36

$E(Z) = \sum kP(Z=k)$

$= 2\cdot 1/36 + 3\cdot 2/36 + \cdots + 12/36$

$= 7 = 2 \times 3.5$

$V(Z) = \sum (k-7)^2 P(Z=k)$

$= \cdots = 35/6 = 2 \times 35/12$

[復習] 期待値の加法性

2−確率変数の期待値と分散の性質(続き)

任意の確率変数X, Yに対し

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

が成り立っている!(期待値の加法性)

例:

Z_n:サイコロをn回振ったときの目の和

とすれば,

$$E(Z_n) = n\times E(Z_1) = 3.5n$$

さらに一般に,

任意の定数$a_1, a_2, \cdots, a_n$と

任意の確率変数定数$X_1, X_2, \cdots, X_n$に対し

$$E(\Sigma a_k X_k) = \Sigma a_k E(X_k)$$

が成り立つ(期待値の線形性).

[復習] 分散の加法性と確率変数の独立性

先のサイコロを2回振る例では，分散についても

$$V(Z) = 2 \times 35/12$$

が成り立っていた.
実は

Z_n：サイコロをn回振ったときの目の和

とすれば，

$$V(Z_n) = n \times (35/12)$$

も成り立っている.

しかし，「分散の加法性」

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

は(「期待値の加法性」と違って)いつでも成り立つわけではない！

成り立つための(十分)条件：

→ 確率変数の独立性

（定義は後ほど・復習ここまで）

Ⅱ．確率変数の特性値 の続き

3−確率変数の標準化

期待値・分散の性質の簡単(だが重要)な応用です.

なのでもう一度復習:

確率変数 X と定数 a, b に対し,

期待値(平均)Eの性質:

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

分散の性質:

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

が常に成り立つ.

Ⅱ．確率変数の特性値 の続き

確率変数の標準化

E(X)＝μ，V(X)＝σ^2 のとき

$$E(X-\mu)=0$$

$$V(X-\mu)=\sigma^2$$

さらにZ＝(X－μ)/σ はとおけば

$$E(Z)=E((X-\mu)/\sigma)=0$$

$$V(Z)=V((X-\mu)/\sigma)=1$$

XからZへの変換を標準化変換,

ZをXの標準化変数という.

おまけ

いわゆる「偏差値」

X：試験の点数

$E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, $Z = (X - \mu)/\sigma$ としたとき

$$[\text{偏差値}]\, Y = 10(X - \mu)/\sigma + 50$$
$$= 10Z + 50$$

よって

$$E(Y) = E(10Z+50) = E(10Z)+50 = 50$$
$$V(Y) = V(10Z+50) = 10^2 V(Z) = 100$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 10$$

すなわち 平均50，標準偏差10 となるように変換した，一種の「標準化」

第11章 確率変数と確率分布

Ⅰ. 確率変数と確率分布の定義

Ⅱ. 確率変数の特性値

- 期待値（平均），分散など
- 期待値と分散の性質
- 確率変数の標準化　　・・・ここまで終わった

Ⅲ. 確率変数の独立性　　・・・次ここ

Ⅳ. 代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など

Ⅴ. 中心極限定理と正規近似

Ⅵ. 標本分布

確率変数の独立性について

（★定義は後回し）

独立な確率変数の性質

確率変数X, Yが互いに独立のとき

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

が成り立つ（↑複号同順ではない！）

さらに

$$E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$$

も成り立っている.

「確率変数の独立性」に関する注意

- 「事象の独立性」とは次元の異なる概念なので，混同しないようによく注意すること.
- とても重要な部分なので，定義も含めて次のセクションできちんと説明します.

その前に・・・

Ⅲ.確率変数の独立性（1）

まず（確率変数ではなくて）事象の独立性
について再確認

［RECALL］
2つの事象A, Bの独立性は
　「AとBが独立」⇔ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
と定義された.
これは
「AとBの成否が互いにもう一方の影響を受けない」
という状態を表していた.

Ⅲ.確率変数の独立性（2）

では2つの確率変数X, Yの独立性はどのように定
　義すればよいだろうか？

すなわち
確率変数X, Yが
　　　　「互いにもう一方の影響を受けない」
とはどういうことか？

これを数式を使ってきちんと（明確に）表したい.

Ⅲ.確率変数の独立性（3）

離散型確率変数の場合
『X, Yのとり得るすべての値x, yについて
事象「X=x」と事象「Y=y」が独立』
ならば「XとYは独立」としよう.

すなわち言い換えると:

［定義］
X, Y: 離散型確率変数 のとき
『X, Yのとり得るすべての値x, yについて
$P(X=x$ かつ $Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$』
ならば「XとYは独立」という.

Ⅲ.確率変数の独立性（4）

しかし！
この定義を連続型確率変数の場合にそのまま当てはめることはできない.

なぜなら・・・
X, Yが連続型確率変数のとき

$$P(X=x \text{ かつ } Y=y),\ P(X=x),\ P(Y=y)$$

はいずれも常に0なので,

$$P(X=x \text{ かつ } Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

は常に成り立つ！

そこで・・・
「値」ではなく「区間」で考える.

Ⅲ.確率変数の独立性（5）

［定義］
確率変数X, Yについて
『任意の実数a,b,c,dに対し
事象「a≦X≦b」と事象「c≦Y≦d」が独立』,
すなわち
『任意の実数a,b,c,dに対し

P(a≦X≦b かつ c≦Y≦d)＝ P(a≦X≦b)P(c≦Y≦d)』

ならば「XとYは独立」という.

【注意1】「任意の」という条件は本質的.
【注意2】上の定義は離散的確率変数にも適用できる
.

S. TOKUNAGA

Ⅲ.確率変数の独立性（6）

2−独立な確率変数の性質

確率変数X, Yが互いに独立のとき

$$V(X\pm Y) = V(X)+V(Y)$$

が成り立つ．

★左辺が＋でなく±となっていることに注意.

- $V(X-Y)=V(X+(-Y))=V(X)+V(-Y)=V(X)+(-1)^2V(Y)$

さらに一般には,

互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ と

任意の定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 対し

$$V\left(\sum a_i X_i\right) = \sum a_i^2 V(X_i)$$

が成り立つ（分散の加法性）．

Ⅲ.確率変数の独立性（7）

つまり

Z_n：サイコロをn回振ったときの目の和

としたとき，

$$V(Z_n) = n \times (35/12)$$

が成り立つのは，

「k回目に振ったのサイコロの目」により定まる
確率変数X_kが 互いに独立 で，分散の加法性：

$$V(Z_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

が成り立つからでした！

<u>その他の性質</u>

X，Yが互いに独立のとき

$$E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$$

も成り立っている(この授業では使う機会がないが).

余談

「確率変数と事象を混同しないように！！」

というのは毎年さんざん強調するのですが，

試験で

「2つの確率変数X，Yが独立である」

ことの定義を書け

という問題を出すと

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

と答案に書く人が後を断たない．

（「P（X）とかP（Y）って何よ？」と突っ込むところ）

これをやると，まず不合格です．

（いわゆる「地雷を踏んだ」状態）

第11章 確率変数と確率分布

Ⅰ．確率変数と確率分布の定義

Ⅱ．確率変数の特性値

- 期待値（平均），分散など
- 期待値と分散の性質
- 確率変数の標準化

Ⅲ．確率変数の独立性・・・ここまで終わった

Ⅳ．代表的な確率分布・・・次ここ

- 2項分布，正規分布など

Ⅴ．中心極限定理と正規近似

Ⅵ．標本分布

Ⅳ.代表的な確率分布（O）

このセクションに出てくる確率分布

離散型確率分布：

- 2項分布
- ポアソン分布

連続型確率分布：

- 正規分布

後で学ぶもの（「Ⅵ.標本分布」および13章以降）

- χ^2分布，t分布，F分布（いずれも連続型）

Ⅳ.代表的な確率分布（1）

1- 2項分布

まず準備として，ベルヌーイ(Bernoulli)試行の概念を導入する．

ベルヌーイ試行（独立試行）の定義：

以下の3条件を満たす試行をベルヌーイ試行という．

1. 各試行において，A(成功)とA^c(失敗)の2通りの結果のみ起こる．
2. 各試行において，P(A)＝pは一定．
3. 各試行(の結果となる事象)は互いに独立．

Ⅳ.代表的な確率分布（2）

2項分布の定義：

1回ごとのA（成功）の確率が p であるような n 回のベルヌーイ試行において，n 回中A（成功）が起こる回数を X とすると

$$P(X=x)={}_nC_x\cdot p^x\cdot(1-p)^{(n-x)}$$

となる．

この式で表される（離散型）確率分布を

二項分布 binomial distribution といい，

記号B（n,p）で表す．

また確率変数XがB（n,p）に従うとき，

$$X \sim B(n,p)$$

と書く．

Ⅳ.代表的な確率分布（3）

2項分布B(n,p)に従う確率変数Xは，
B(1,p)に従うn個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の和とみなすこともできる．

ここで，各X_iについて期待値と分散は

$$E(X_i) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$V(X_i) = (0-p)^2 (1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$$

よって期待値および分散の加法性より

$$E(X) = nE(X_i) = np$$

$$V(X) = nV(X_i) = np(1-p)$$

Ⅳ.代表的な確率分布（4）

例題（平成15年度試験問題より）
サイコロを n 回振るとき、
「1または2の目が出る回数」
を X とおく。以下の問いに答えよ。

（1）X の分布を記号で表すとB(_______ , _______)。
また E(X)=(　　　　　)、V(X)=(　　　　　)である。
（nを用いて表せ）

（2）n=5のとき、P(X ≦3)を求めよ。
［解答］
$P(X \leqq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$
$= {}_5C_0 (1/3)^0 (2/3)^5 + {}_5C_1 (1/3)^1 (2/3)^4 + \cdots$

Ⅳ.代表的な確率分布（5）

2- ポアソン分布

[定義]確率変数Xの分布が

$$f(X)= P(X=x) = e^{-\lambda} \lambda^{x} / x!$$

で表されるとき、Xの分布をポアソン分布Poisson distributionといい、*Po*(λ)で表す。

ポアソン分布の期待値と分散:

Xがポアソン分布*Po*(λ)に従うとき、

$$E(X)=V(X)= \lambda$$

Ⅳ.代表的な確率分布（6）

3-正規分布normal distribution

- もっとも重要かつ役に立つ分布．単に「連続型確率分布の代表例」というだけではない.
- 後述の「中心極限定理」により，他の確率分布の問題も正規分布で近似して解決できるケースが少なくない.
- 別名ガウス分布.

Ⅳ.代表的な確率分布（7）

- 正規分布の密度関数:

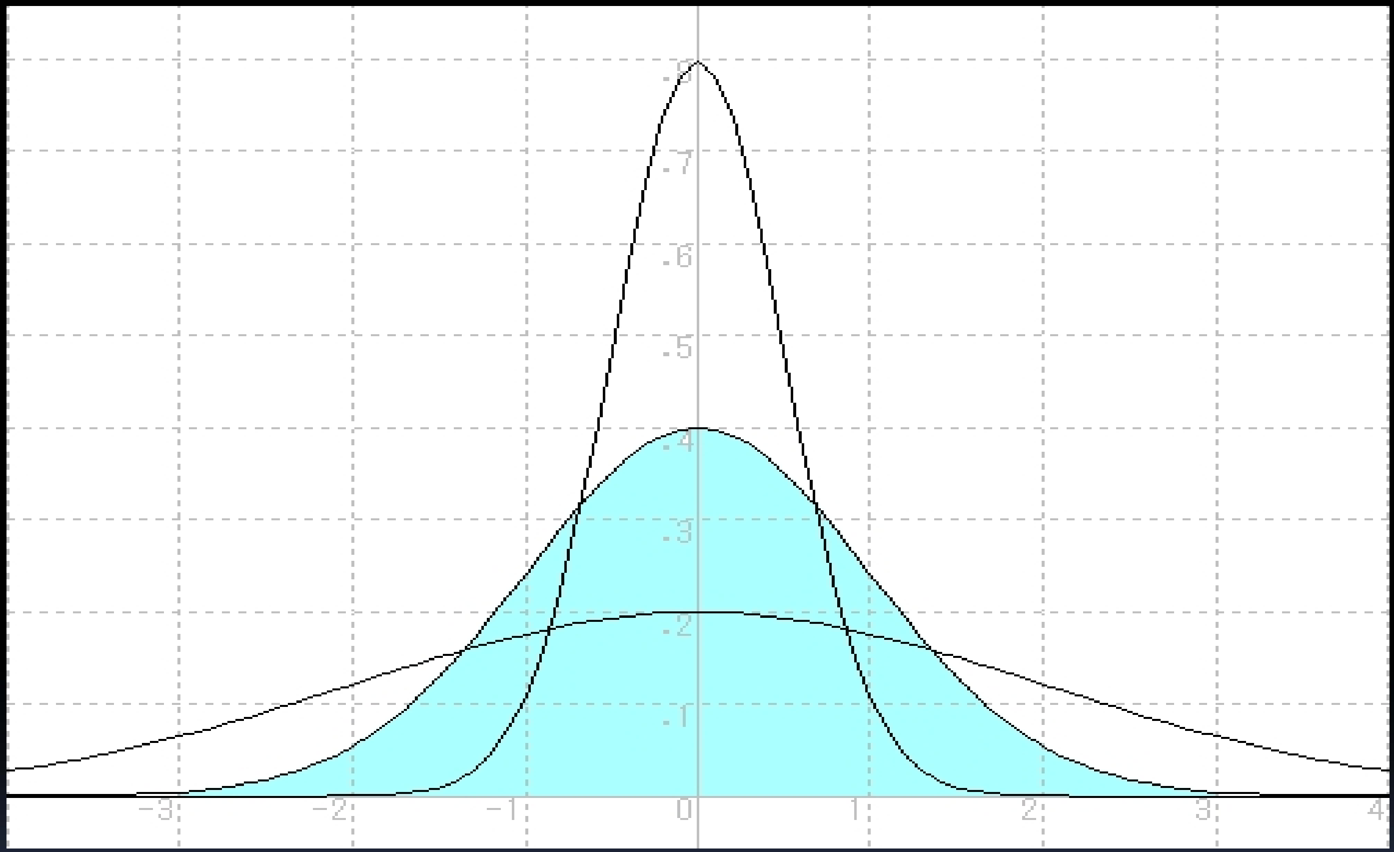
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ここで，μ は期待値，σ^2は分散となっている．

- 期待値 μ，分散 σ^2の正規分布を N(μ, σ^2)で表す．
- Xが N(μ, σ^2)に従うとき，X～N(μ, σ^2)と書く．
- N(0, 1)を標準正規分布という．

Ⅳ.代表的な確率分布（8）

- N(0, 1)，N(0, 2)，N(0, 0.5)の密度関数のグラフ:



（1）直線 $x = \mu$ (＝0)に関して対称.

（2）$x = \mu$ (＝0)で最大値$1/\sqrt{(2\pi\sigma^2)}$をとり，$x = \pm\infty$で0.

（★分散が大きいほど，「山」は低くなり「裾野」が広がる）

（3）$x = \pm\sigma$で変曲点.

Ⅳ.代表的な確率分布（9）

[1]正規分布の線形変換と標準化

Xが正規分布に従うとき，その線形変換

（Y＝aX+bの形の変換）も正規分布に従う．

したがって，

X～ N(μ , σ^2) のとき

Xの標準化変数 $Z = (X - \mu) / \sigma$

は 標準正規分布N(0,1) に従う．

Ⅳ.代表的な確率分布（10）

Xの区間と確率の関係（教科書p.94図11-5参照）

$P(\mu-\sigma \leqq X \leqq \mu+\sigma) = P(-1 \leqq Z \leqq 1) = 0.6827$

$P(\mu-2\sigma \leqq X \leqq \mu+2\sigma) = P(-2 \leqq Z \leqq 2) = 0.9545$

$P(\mu-3\sigma \leqq X \leqq \mu+3\sigma) = P(-3 \leqq Z \leqq 3) = 0.9973$

★教科書p.135付表1で値を確認せよ.

（試験でこの表を使用するので慣れておく必要あり）

$P(\mu-1.645\sigma \leqq X \leqq \mu+1.645\sigma)$

$= P(-1.645 \leqq Z \leqq 1.645) = 0.900$

$P(\mu-1.96\sigma \leqq X \leqq \mu+1.96\sigma)$

$= P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.950$

（特に最後の2つはよく用いられる値）

★教科書p.135付表1, p.136付表2で値を確認せよ.

Ⅳ.代表的な確率分布（11）

[2]正規分布の再生性

確率変数X_1, X_2が互いに独立で、それぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma^2_1)$, $N(\mu_2, \sigma^2_2)$に従うとき，和X_1+X_2は

正規分布$N(\mu_1+\mu_2, \sigma^2_1+\sigma^2_2)$

に従う.

注意：

$$E(X_1+X_2)=\mu_1+\mu_2, \quad V(X_1+X_2)=\sigma^2_1+\sigma^2_2$$

はそれぞれ「期待値の加法性」「分散の加法性」から導けるので,

「和をとっても正規分布」

という部分のみ本質的.

第11章　確率変数と確率分布

Ⅰ．確率変数と確率分布の定義

Ⅱ．確率変数の特性値

- 期待値（平均），分散など
- 期待値と分散の性質
- 確率変数の標準化

Ⅲ．確率変数の独立性

Ⅳ．代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など・・・ここまで終わった

Ⅴ．中心極限定理と正規近似・・・次回ここから

Ⅵ．標本分布