統計（医療統計）
後期重要スライド ピックアップ

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

注意事項

- 前期の要点は第7回のスライドで確認してください.
- スライドをピックアップしただけなので，前後の繋がりはあまり考慮していません. あくまで確認用ですから，自信のないところは，元の授業スライドに戻って内容を確認してください.
- ［再確認］試験は電卓持ち込み可です.

第13章 推定

Ⅰ．母集団と標本

Ⅱ．点推定

- 不偏性，不偏推定量

＊＊＊前期試験範囲ここまで＊＊＊

Ⅲ．区間推定

Ⅳ．母平均の区間推定

1. 母分散が既知のとき
2. 母分散が未知のとき

Ⅴ．母分散の区間推定

Ⅵ．母比率の区間推定

[前期の復習]標本平均の分布・まとめ（対比して再確認）

定理(正規分布の性質より)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う母集団から無作為抽出した標本とすると

$$標本平均\ \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

定理(中心極限定理の系)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を平均μ，分散σ^2である任意の母集団から無作為抽出した標本とするとき，

標本サイズnが十分大きければ，近似的に

$$標本平均\ \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

となる.

★以上を踏まえて区間推定の具体的な方法へ

Ⅳ．母平均の区間推定

母平均μの区間推定(母分散既知)の解法

- $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$と近似(中心極限定理による).
  - 注意:正規母集団を仮定すれば厳密.
- $Z=(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ と標準化すると $Z \sim N(0, 1)$
- $P(-z(\alpha/2) \leqq Z \leqq z(\alpha/2))=\gamma$
  - ただし$\gamma=1-\alpha$. $z(\alpha)$ は $P(Z \geqq z(\alpha))=\alpha$ を満たす値.
  - たとえば$\gamma=0.95$ のとき$\alpha/2=0.025$, $z(\alpha/2)=z(0.025)=1.96$
  - $z(\alpha/2)$は「上側$100(\alpha/2)$%点」と呼ばれる.
- ↑を同値変形すると

$$P(\bar{X}-z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n} \leqq \mu \leqq \bar{X}+z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n})=\gamma$$

よって「μの$(100\times\gamma)$%信頼区間」は

$$(\bar{X}-z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n},\ \bar{X}+z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n})$$

Ⅳ．母平均の区間推定

「μの(100×γ)%信頼区間」:

$$\left(\bar{X} - z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n},\ \bar{X} + z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n}\right)$$

について:

- 標本平均(の実測値)を中心とする区間である.
- $\sigma/\sqrt{n}$ は標準誤差と呼ばれる.

[その他の重要な考察]

- γを大きくすると・・・
  - $\alpha = 1-\gamma$ は小さくなる → $z(\alpha/2)$ は大きくなる.
    →信頼区間の幅が大きくなる.
  (外れる確率を減らすのだから、幅を大きく取る必要があるのは当然)
- nを大きくすると → 信頼区間の幅が小さくなる.
  - 情報量が増えるのだから, 誤差が減るのは当然

Ⅳ．母平均の区間推定（母分散未知）

母平均μの区間推定（母分散未知の場合）

母分散σ^2が未知であっても

標本の不偏分散 $U^2 := \{ \Sigma (x_i - \bar{x})^2 \} / (n-1)$

は，常にわかる（標本データから計算できる）.

そこで母分散未知の場合には：

- 方針1：U^2をσ^2の近似値（推定値）として利用.
  - U^2はσ^2の（不偏）推定量ですからね.
  - 「近似」を認めてしまえば，またしても正規分布の問題に帰着．推定の方法はほとんど同じ.

    （Uの値をσのところに代入するだけ．同じ公式が使える）
  - 標本サイズが大きければ，良い（誤差の少ない）近似値であることが期待できる.
  - だが小標本の場合は誤差が無視できないはず.

    →方針2へ

S. TOKUNAGA

Ⅳ．母平均の区間推定（母分散未知）

＊＊＊ここからまったく新しい内容＊＊＊

- 方針2：σ^2を用いずに表せる（U^2を含む）統計量を導入する．

→第11章Ⅴ

3−その他の重要な標本分布［2］ t分布

以下の定理を利用：

定理（教科書p.100）

正規母集団$N(\mu, \sigma^2)$からの，大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ について，標本平均X'，不偏分散を U^2とする．このとき，確率変数

$$T := (X' - \mu)/(U/\sqrt{n})$$

は自由度n−1のt分布（と呼ばれる分布）に従う．

Ⅳ．母平均の区間推定（母分散未知）

t分布を利用したμの推定

- 母分散σ^2が未知の正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$からの，大きさ n の無作為標本$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$について，標本平均x'，不偏分散を$U^2$とする．

このとき

$$t = (x' - \mu) / (U/\sqrt{n}) \sim \text{（自由度}n-1\text{のt分布）}$$

だから

- 母平均μの信頼度$\gamma = 1 - \alpha$の信頼区間は

$$\left(x' - t_{n-1}(\alpha/2)\, U/\sqrt{n},\ x' + t_{n-1}(\alpha/2)\, U/\sqrt{n} \right)$$

【注意】やってることは母分散既知の場合と大差ない．自由度という新たなパラメータが出てきただけ．

［RECALL］母分散既知の場合のμの100(1−α)%信頼区間：

$$\left(\bar{X} - z(\alpha/2)\, \sigma/\sqrt{n},\ \bar{X} + z(\alpha/2)\, \sigma/\sqrt{n} \right)$$

Ⅵ．母比率の区間推定

2項分布の正規近似RECALL

中心極限定理により，nが十分大きいとき，

B(n,p)はN(np, np(1−p))で近似できる.

∵ B(n,p)に従う確率変数は， B(1,p)(という同一の分布)に従う独立なn個の確率変数の和と見なせるから.

- 従って，標本比率P＝X/nの分布も，

  正規分布 N(p, p(1−p)/n) で近似できる.
- さらにPの標準化変数：

$$Z=(P-p)/\sqrt{p(1-p)/n}$$

  は近似的に標準正規分布に従う.
- 分布が決まれば，あとはこれまでと同じ考え方で進めればよいはず(？)

S. TOKUNAGA

Ⅵ．母比率の区間推定

推定を行う際は，

$$\left(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{p(1-p)/n},\ P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{p(1-p)/n}\right)$$

においてpを近似値（推定値）P_0で置き換える.

すなわち信頼度$\gamma=1-\alpha$の信頼区間は：

$$\left(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n},\ P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n}\right)$$

★ただし，誤差の最大値を見積もりたいときは$p=0.5$ を採用.

- $p(1-p)$は$p=0.5$のとき最大値0.25を取ることに注意（２次関数のグラフを思い出せ！）.
- 「誤差の最大値を見積もりたいとき」の例：
  →誤差が一定値以下となるような標本サイズを決定する問題など.
  （標本サイズを決定する時点ではP_0の値は得られていない！）

★（14章でやる）「母比率の検定」との違いに注意！

S. TOKUNAGA

第13章 推定

Ⅰ．母集団と標本

Ⅱ．点推定

- 不偏性，不偏推定量

＊＊＊前期試験範囲ここまで＊＊＊

Ⅲ．区間推定

Ⅳ．母平均の区間推定

1. 母分散が既知のとき
2. 母分散が未知のとき

Ⅴ．母分散の区間推定

Ⅵ．母比率の区間推定・・・第８回はここまで

第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定
Ⅲ．母分散の検定　　・・・割愛します
Ⅳ．平均値の差の検定
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定
Ⅶ．適合度の検定
Ⅷ．独立性の検定

第14章 Ⅰ. 検定

4-検定の手順

① 帰無仮説H_0, 対立仮説H_1, 有意水準αを定める.

② 標本から統計量（検定統計量）を求める.

③ 検定統計量の分布を調べ, その実現値が棄却域に入るかどうか調べる.

④ 棄却域に入ればH_0を棄却してH_1を採択, 入らなければH_0を採択.

【注意】H_0が棄却できなかったとき, 便宜上「H_0を採択」というが, 「棄却できない」ことは「H_0の正しさ」を積極的に主張するものではない！

- 単に「否定はできなかった」ということ. 仮にH_0が間違っていても, 検定統計量が”たまたま”採択粋に入ることは十分あり得る.
- 「背理法で証明しようとしたら矛盾が導けなかった」ようなもの. ある意味検定の”失敗”.

第14章 Ⅱ．母平均の検定

母平均μに関して

$$\text{帰無仮説}H_0: \mu = \mu_0$$

を検定する.

- 通常，H_0 が正しくないことを期待して行う.
- とりあえず正規母集団を仮定.
  - 【注意】一般に，母集団分布として特定の分布（正規分布など）を仮定して行う検定をパラメトリック検定，そうでないものをノンパラメトリック検定という. この授業では主にパラメトリック検定を扱う（したがって必然的に，母集団分布の仮定には常に留意する必要がある）.
- 以下，標本サイズをn，標本平均をX'，有意水準をαとする

1−母分散が既知のとき

母分散をσ^2とする． X'の標準化変数 $Z=(X'-\mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$が（正規母集団の仮定のもとでは厳密に）標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので，これを検定統計量とする.

両側検定の場合（対立仮説$H_1: \mu \neq \mu_0$）:

- $|Z| \geqq z(\alpha/2)$ならば H_0を棄却.
- $|Z| < z(\alpha/2)$ならば H_0を棄却しない（採択）.

第14章 Ⅱ. 母平均の検定

1−母分散が既知のとき（続き）

【注意（教科書への補足）１】

- 以上は標本平均の標準化変数 Z を検定統計量とした場合.
- 標本平均X’そのものを検定統計量としてX’の棄却域を考えるなら

$$P\left(-z(\alpha/2) \leqq Z \leqq z(\alpha/2)\right) = \gamma \ (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P\left(\mu_0 - z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n} \leqq X' \leqq \mu_0 + z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n}\right) = \gamma$$

となるから,

$$\left(\mu_0 - z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n},\ \mu_0 + z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n}\right)$$

がX’の採択域で、この外が棄却域.

- RECALL:「μの100(1−α)%信頼区間」は

$$\left(X' - z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n},\ X' + z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n}\right)$$

だった. すなわち両側検定の場合, 有意水準100α%でのX’の採択域は, μの100(1−α)%信頼区間を平行移動したものであり,

- 「μ_0がμの100(1−α)%信頼区間に入る」こと と
- 「X’の実現値が有意水準αでの採択域に入る」こと

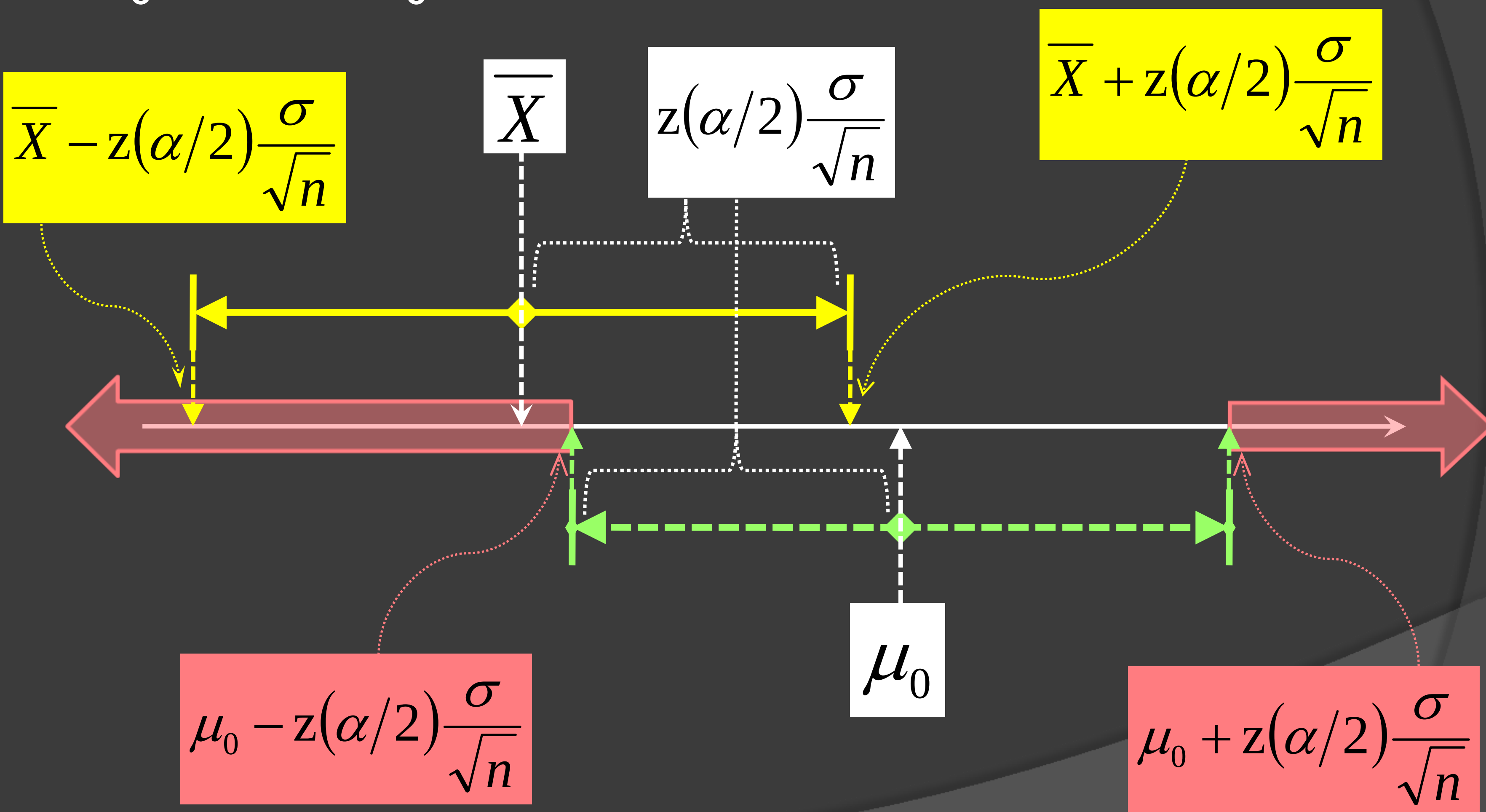
が同値.

（つまり区間推定をやれば両側検定の結果もわかる！）

S. TOKUNAGA

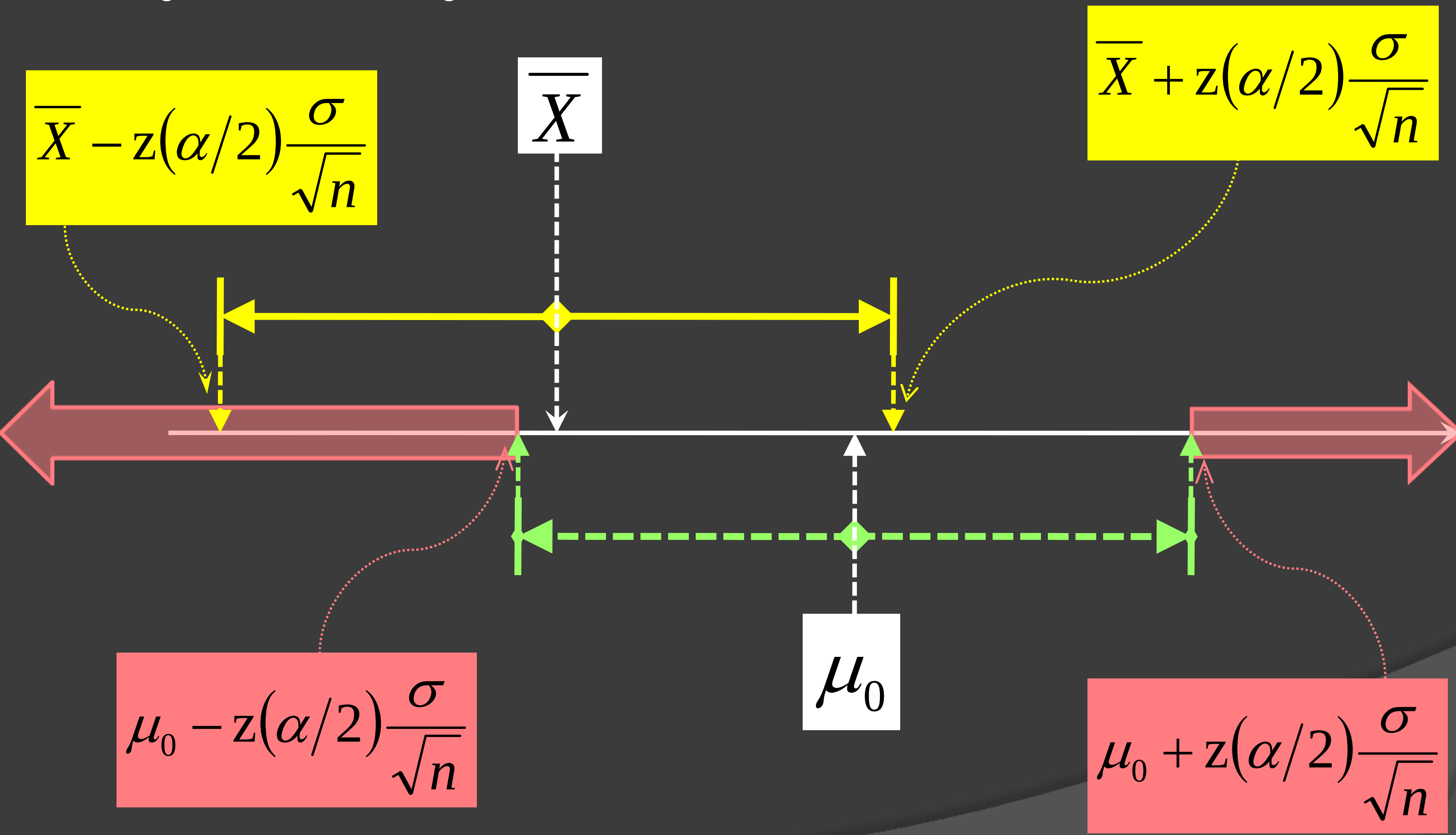
100（1－α）%信頼区間と
有意水準αの両側検定における採択域・棄却域の関係（1）
（母分散既知・標本平均を検定統計量とした場合）

H_0: $\mu = \mu_0$は**棄却**



100（1－α）%信頼区間と
有意水準αの両側検定における採択域・棄却域の関係（2）
（母分散既知・標本平均を検定統計量とした場合）

$H_0: \mu = \mu_0$は**棄却されない**



第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定　・・・第９回はここまで
Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛します
Ⅳ．平均値の差の検定・・・第１０回はここから
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定
Ⅶ．適合度の検定
Ⅷ．独立性の検定

第14章 Ⅱ. 母平均の検定

2−母分散が未知のとき

（★標本サイズが大きければ正規分布に帰着させて解くことができるのは推定の場合と同じ）

標本の不偏分散をU^2とする.

$$T=(X'-\mu_0)/(U/\sqrt{n})$$（スチューデント比）

が自由度n−1のt分布に従うので, これを検定統計量として、

両側検定の場合:

① $|T| \geqq t_{n-1}(\alpha/2)$ならば H_0を棄却.

② $|T| < t_{n-1}(\alpha/2)$ならば H_0を棄却しない（採択）.

第14章 Ⅱ．母平均の検定

2−母分散が未知のとき（続き）

【注意（教科書への補足）】

- t分布を用いるので正規母集団の仮定は必須.

（以降は母分散既知の場合と同様）

- 片側検定なら（対立仮説H_1 が$\mu > \mu_0$または$\mu < \mu_0$）

  「①T≧ $t_{n-1}(\alpha)$で棄却，②T＜ $t_{n-1}(\alpha)$で採択」（$H_1 : \mu > \mu_0$）

  または

  「①T≦－$t_{n-1}(\alpha)$で棄却，②T＞－$t_{n-1}(\alpha)$で採択」（$H_1 : \mu < \mu_0$）

- 標本平均X’を検定統計量としてX’の棄却域を考えるなら

$$P\left(t_{n-1}(\alpha/2) \leqq T \leqq t_{n-1}(\alpha/2)\right) = \gamma \ (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P\left(\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2)\, U/\sqrt{n} \leqq X' \leqq \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2)\, U/\sqrt{n}\right) = \gamma$$

となるから，

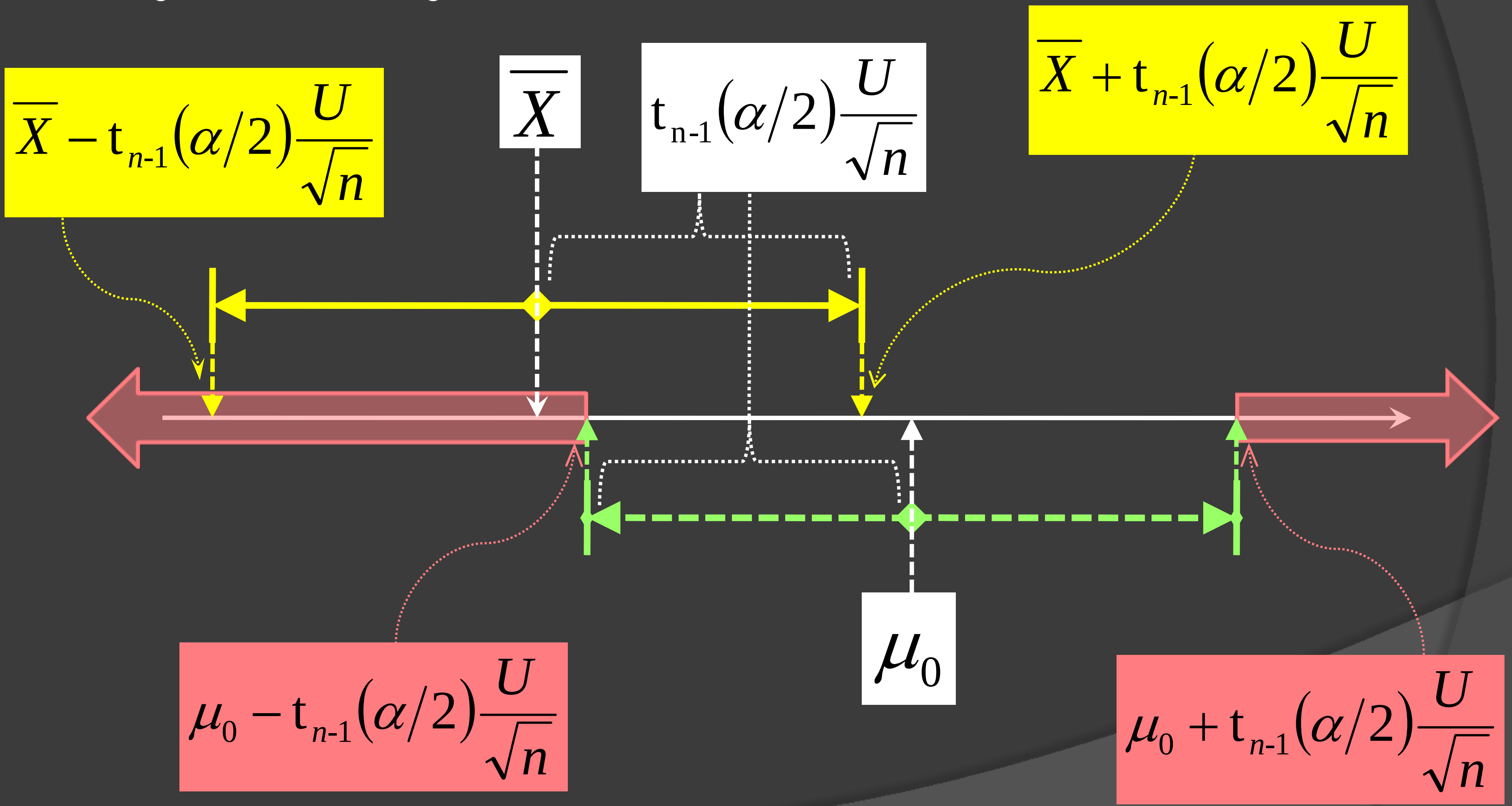
$$\left(\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2)\, U/\sqrt{n} \ , \ \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2)\, U/\sqrt{n}\right)$$

が X’の採択域で、この外が棄却域.

- 両側検定の場合，「有意水準100α%でのX’の採択域」と「μの100(1−α)%信頼区間」が平行移動の関係にあるのは母分散既知の場合と同様.

100（1－α）%信頼区間と 有意水準αの両側検定における採択域・棄却域の関係（1） （母分散未知・標本平均を検定統計量とした場合）

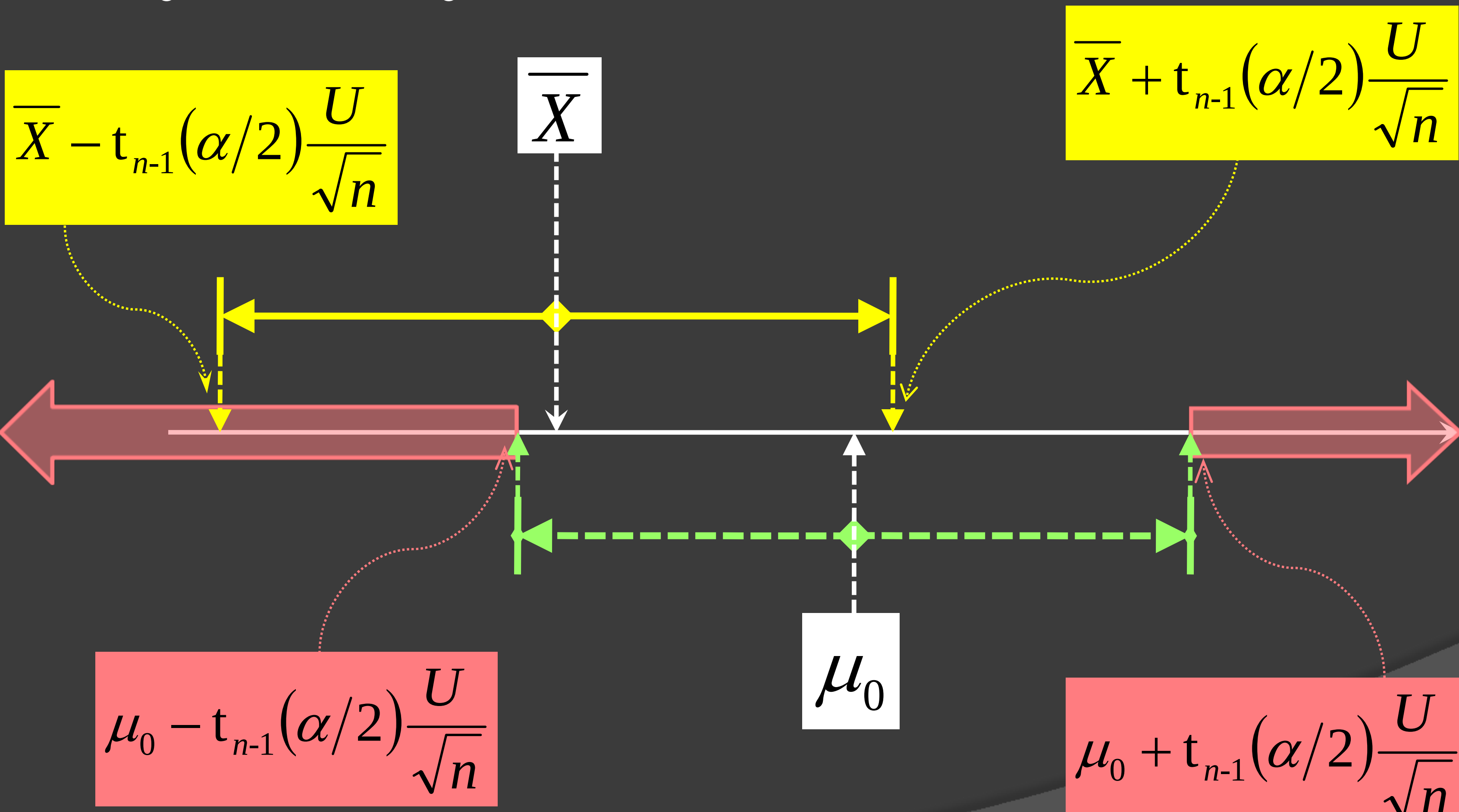
$H_0: \mu = \mu_0$は**棄却**



S. TOKUNAGA

100（1－α）%信頼区間と有意水準αの両側検定における採択域・棄却域の関係（2）（母分散未知・標本平均を検定統計量とした場合）

$H_0: \mu = \mu_0$は棄却されない



第14章 Ⅱ．母平均の検定

p.115例題1（母分散が既知のとき）

副甲状腺機能低下症の患者における，血清カルシウムの平均値μを検定する問題．

- 標本サイズn＝16（人），標本平均7.4mg/dl
- 健常人の場合：
  - 平均9.8mg/dl ・・・ 帰無仮説で用いる値
  - 標準偏差0.5mg/dl ・・・ 既知の母標準偏差として採用
  - 正規分布 ・・・ 検定対象も正規母集団と考える

［解答］

帰無仮説H_0：$\mu =9.8$mg/dl（健常者と同じ）

対立仮説H_0：$\mu \neq 9.8$mg/dl（健常者と異なる・両側検定）

検定統計量：標本平均X’の標準化変数 $Z=(X'-\mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$

Zの実現値＝・・・＝－19.2＜－1.96＝－z(0.025)より棄却．

よって血清カルシウムの数値（平均値）は低くなると結論づけられる．

- 【追加問題1】片側検定なら？

（解答：－z(0.05)＝－1.645 と比較し，やはり棄却）

- 【追加問題2】標本平均X’を検定統計量とした場合の X’の棄却域は？
- 【追加問題3】母平均の95%信頼区間は？それと検定問題との関係は？

あらためて第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定　・・・ここまで終わった
Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛します
Ⅳ．平均値の差の検定　←次ここ
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定
Ⅶ．適合度の検定
Ⅷ．独立性の検定

第14章 Ⅳ. 平均値の差の検定

2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

に関して，これらの母集団の平均値が等しいかどうかを調べる.
すなわち，

$$帰無仮説H_0: \mu_1 = \mu_2$$

を検定する.

1−母分散が既知のとき（あまり現実的ではないが・・・）
2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とする（σ_1^2, σ_2^2は既知）.

- 標本平均をそれぞれ X’, Y’ とすると

$$X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1), \quad Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$$

S. TOKUNAGA

第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

1−母分散が既知のとき（続き）

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$，$Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$より

$$X'-Y' \sim N(\mu_1-\mu_2,\ \sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2)$$

- よって標準化変数：

$$Z=\{(X'-Y')-(\mu_1-\mu_2)\}/\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}$$

が $N(0,1)$に従う．

- 分布さえ決まってしまえば，あとの手順はⅡ．でやった検定と同様！
- 【注意1】帰無仮説H_0：$\mu_1=\mu_2$のもとでは$\mu_1-\mu_2=0$なので，「$-(\mu_1-\mu_2)$」を省略した統計量を考えればよい．
- 【注意2】教科書には

両側検定（対立仮説H_1：$\mu_1\neq\mu_2$）

の場合しか載っていないが，事前に大小関係を予測できるなら

片側検定（H_1：$\mu_1>\mu_2$またはH_1：$\mu_1<\mu_2$）

も当然あり得る．

第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

1−母分散が既知のとき（補足）

特に$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$（すなわち等分散）のときは

- $X' \sim N(\mu_1,\ \sigma^2/n_1)$，$Y' \sim N(\mu_2,\ \sigma^2/n_2)$

  より

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2))$$

- よって標準化変数：

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

  が N(0,1)に従う.

  （注：帰無仮説のもとでは $\mu_1 - \mu_2 = 0$ なので，「$-(\mu_1 - \mu_2)$」は消える）

★次にやる「2−母分散が未知だが等しいことは既知のとき」と比較せよ.

第14章 Ⅳ. 平均値の差の検定

1−母分散が既知のとき（補足）

母分散既知で等分散の場合についてまとめると以下の通り:
（標本平均X’, Y’ の実現値をそれぞれ x’, y’ とする）

（1）[両側検定] H_0: $\mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$$z := (x' - y') / \sqrt{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)}$$

とおくと,

$|z| \geqq z(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

（2）[（右）片側検定] H_0: $\mu_1 = \mu_2$, 対立仮説 H_1: $\mu_1 > \mu_2$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$z \geqq z(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

2−母分散が未知だが等しいことは既知のとき

次の定理を用いる（教科書では詳しく説明されていないので注意！）：

定理

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1,\ \sigma^2),\ N(\mu_2,\ \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\},\ \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とし，これらの標本の平均，不偏分散をそれぞれX'，Y' U_1^2，U_2^2 とする．

このとき，確率変数

$$T := \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{ S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

は自由度n_1+n_2-2 のt分布に従う．

ただし，S_p^2はU_1^2，U_2^2の**統合分散**と呼ばれ，

$$S_p^2 := \{(n_1-1)U_1^2 + (n_2-1)U_2^2\} / (n_1+n_2-2)$$
$$= \{\Sigma(X_i - X')^2 + \Sigma(Y_i - Y')^2\} / (n_1+n_2-2)$$

[復習]第14章 Ⅳ. 平均値の差の検定

2−母分散が未知だが等しいことは既知のとき(続き)

【注意1】

$T = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$

と，母分散(σ^2)既知の場合の

$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma^2 / (1/n_1 + 1/n_2))$

の標準化変数:

$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$

の類似に注意.

母分散σ^2が統合分散

$S_p^2 = \{(n_1 - 1) U_1^2 + (n_2 - 1) U_2^2\} / (n_1 + n_2 - 2)$

に置き換わっただけ.

第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

統合分散の意味するところ：

$$s_p^2 = \{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2\}/(n_1+n_2-2)$$
$$= \{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2\}/\{(n_1-1)+(n_2-1)\}$$

であるから，U_1^2, U_2^2の重み付き平均とみなすこともできる．

ここで

$$E(s_p^2)$$
$$=\{(n_1-1)E(U_1^2)+(n_2-1)E(U_2^2)\}/\{(n_1-1)+(n_2-1)\})$$
$$=\{(n_1-1)\sigma^2+(n_2-1)\sigma^2\}/\{(n_1-1)+(n_2-1)\}$$
$$=\sigma^2$$

より，s_p^2はσ^2の不偏推定量になっている．

第14章 Ⅳ．平均値の差の検定

2−母分散が未知だが等しいことは既知のとき（まとめ）

標本平均X’, Y’ の実現値をそれぞれ x’, y’ とする．

自由度 $\nu = n_1 + n_2 - 2$ とおく.

（1）［両側検定］

帰無仮説H_0： $\mu_1 = \mu_2$，対立仮説H_1： $\mu_1 \neq \mu_2$

に対し，有意水準αで検定するとき，

$$t_0 := (x' - y') / \sqrt{ s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2) }$$

（すなわち定理のTの実現値）とおくと，

$|t_0| \geqq t_\nu(\alpha/2)$ のときH_0が有意水準αで棄却される．

（2）［（右）片側検定］

帰無仮説H_0：$\mu_1 = \mu_2$，対立仮説H_1：$\mu_1 > \mu_2$

に対し，有意水準αで検定するとき，

$t_0 \geqq t_\nu(\alpha)$ のときH_0が有意水準αで棄却される．

あらためて第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定

Ⅱ．母平均の検定

Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛しました

Ⅳ．平均値の差の検定・・・第１０回ここまで

Ⅴ．等分散の検定　・・・第１１回ここから

Ⅵ．比率の検定

Ⅶ．適合度の検定

Ⅷ．独立性の検定

第14章Ⅴ．等分散の検定（その7）

- 定理を利用して

  帰無仮説H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 対立仮説H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

  として有意水準αで**両側**検定.

（以下標本サイズ n_1, n_2, 対応する不偏分散 U_1^2, U_2^2 とする）

- 棄却域は分布の両側に存在するが，定理より，
  - ① U_1^2/U_2^2 は自由度対(n_1-1, n_2-1)のF分布に従う.
  - ② U_2^2/U_1^2 は自由度対(n_2-1, n_1-1)のF分布に従う.

  →よって①② のうち**［実現値］＞1となる方を検定統計量とする**ことにしておけば，右側（上側）の棄却域のみ調べれば済む！

  - 自由度対(k, l)のF分布の上側100α%点$f_l^k(\alpha)$は巻末の付表5･6で与えられている（ただしα＝0.05, 0.025の場合のみ）.

- （U_1^2の実現値）＞（U_2^2の実現値）のとき，$F = U_1^2/U_2^2$ とおき，

  ① $\boxed{F \geq f_{n_2-1}^{n_1-1}(\alpha/2)}$ なら H_0 を棄却.

  ② $\boxed{F < f_{n_2-1}^{n_1-1}(\alpha/2)}$ なら H_0 を採択（棄却しない）.

【重要】教科書pp.122 -123例題８ （訂正あり）

卒業試験における上位グループと下位グループの点数のバラツキに差異があるかどうか（母分散に差があるかどうか）を検定する問題。

- 上位8人の不偏分散 $U_1^2 = 28.6$
- 下位5人の不偏分散 $U_2^2 = 49.7$

★正規母集団は仮定されているとする（14章全体で仮定されている）.

$U_1^2 < U_2^2$ なので， $F= U_2^2 / U_1^2$ を検定統計量として等分散の検定（帰無仮説H_0：両グループの母分散は等しい）を行う

[例題8]解答

誤「これが自由度（7,4）のF分布に従う」←第4刷でも直ってない！

正「これが自由度対（4,7）のF分布に従う」

（右側の図14-11の説明も同様）

★以降は合ってます（表現にはやや難がありますが）：

$$f_7^4(0.05/2) = f_7^4(0.025) = 5.52$$

$$[\text{Fの実現値}]=49.7/28.6=1.73<5.52$$

より，H_0は棄却されず，バラツキに差異があるとは言えない.

（★「差異はないと結論づけられる」はちょっと言いすぎ）

等分散の検定に関する補足

- 正規母集団の仮定はここでも必要！
- 一般に自由度対（k, l）のF分布の上側100α%点 $f_l^k(\alpha)$ について， $f_l^k(1-\alpha) = 1/f_k^l(\alpha)$ が成り立つので，左側の棄却域を調べることも可能（だが計算の手間が増えるだけなので普通はやらない）．
- 「母分散が未知だが等しい場合の平均値の差の検定」の前段階として行う場合，通常の検定問題と違い，帰無仮説（＝「等分散仮説」）H_0 が棄却されないことを期待している．
  - 検定問題としては例外的なケース！
- 【再確認】仮説検定においては一般に， H_0 が棄却されなかったからといって H_0 の正しさが保証されるわけではない！
  - あくまで「否定できなかった」だけ．
- H_0 が棄却される場合は，他の方法を用いなければならない．

→Ⅳ．「3-母分散が未知で異なるとき」（今年度も割愛）

あらためて第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定

Ⅱ．母平均の検定

Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛しました

Ⅳ．平均値の差の検定

Ⅴ．等分散の検定　・・・ここまで終わった

Ⅵ．比率の検定　・・・次ここ

Ⅶ．適合度の検定

Ⅷ．独立性の検定

Ⅵ. 比率の検定（2）

2項分布の正規近似RECALL

中心極限定理により，nが十分大きいとき，

B（n,p）はN（np, np（1−p））で近似できる.

∵ B（n,p）に従う確率変数は，B（1,p）（という同一の分布）に従う独立なn個の確率変数の和と見なせるから.

- 従って，標本比率P＝X/nの分布も，
  正規分布 N（p, p（1−p）/n） で近似できる.
- さらにPの標準化変数：

$$Z=(P-p)/\sqrt{p(1-p)/n}$$

は近似的に標準正規分布に従う.

- 分布が決まれば，以降の考え方は他のケースと同じ.

ただし・・・

Ⅵ．比率の検定（3）

【重要】母比率の推測における推定と検定の違い

以下母比率をp，標本比率P＝X/n の実現値をP_0とする．

- 推定を行う際は，

  Z=（P－p）/√（p（1－p）/n）の分母（Pの標準偏差）のpを近似値（推定値）P_0で置き換えて計算．

すなわち信頼度γ＝1－αの信頼区間は以下のようになった：

$$\left(P_0-z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n},\ P_0+z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n}\right)$$

- ただし，誤差の最大値を見積もりたいときはp=0.5 を採用．

これに対し

- 検定の際は母比率pの値が帰無仮説で（もちろん厳密な値として）与えられるので，近似の必要がなく，上のような置き換えはまったく無意味！
  - Z=（P－p）/√（p（1－p）/n）に，標本比率P=P_0および帰無仮説で与えたp=p_0の値をそのまま代入して実現値を計算し，　棄却／採択を判定すればよい．
  - 仮説検定に対する理解の根本に関わる部分なので，

ここを間違える人は合格させません！

Ⅵ. 比率の検定(4)

比率の検定(まとめ)

(1)[両側検定]

帰無仮説 H_0: $p=p_0$, 対立仮説H_1: $p\neq p_0$

に対し, 有意水準αで検定する場合,

$$Z=(P-p_0)/\sqrt{(p_0(1-p_0)/n)}$$

とおくと, $|Z| \geqq z(\alpha/2)$のとき棄却される.

(2)[(右)片側検定]

帰無仮説 H_0: $p=p_0$, 対立仮説H_1: $p>p_0$

に対し, 有意水準αで検定する場合,

$Z\geqq z(\alpha)$のとき棄却される.

【重要】教科書pp.123-124［例題９］

補習授業によって合格率が（全体の平均）75%より上がったかどうかを検定.

- 帰無仮説 H_0: $p = p_0 = 0.75$
- 対立仮説 H_1: $p > 0.75$ （下がることはないだろうから）
- 標本サイズn＝103, 標本比率93/103＝0.91.

検定統計量Zの実現値を求めると:

$Z = (P - p_0) / \sqrt{(p_0(1 - p_0)/n)}$

$= (0.91 - 0.75) / \sqrt{((0.75 \times (1 - 0.75)/103)}$

$= 3.75$

$> z(0.05) = 1.64$ →よって棄却（補習の効果はあった）

★Zの分母において，p_0に標本比率93/103＝0.91を代入するのは絶対にやってはいけない誤り！

【参考】補習を受けた学生の合格率の100(1−α)%信頼区間は:

$(0.91 - z(\alpha/2)\sqrt{(0.91(1-0.91)/103)},\ 0.91 + z(\alpha/2)\sqrt{(0.91(1-0.91)/103)})$

S. TOKUNAGA

あらためて第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定
Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛しました
Ⅳ．平均値の差の検定
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定　・・・ここまで終わった
Ⅶ．適合度の検定　・・・次回ここから
Ⅷ．独立性の検定

第14章Ⅶ．適合度の検定 （3）

χ^2分布（と呼ばれる既知の分布）を導入．

- 以下の定理を用いる：

定理

総度数nが十分大きいとき，カテゴリーの個数が k ならば

$$\chi_0^2 = \Sigma((観測度数 - 期待度数)^2/(期待度数))$$

（食い違い度）は近似的に自由度 k−1 の χ^2（カイ二乗）分布に従う．

【注意】

- 教科書では観測度数（観測値）をX_i，期待度数をm_iと置いている．
- （各カテゴリーの度数の和）＝（総度数）が制約式となるので，自由度は「（カテゴリー数）－１」．

- 有意水準 α のとき，χ_0^2の実現値を，自由度 k−1 の χ^2分布の上側100α%点 χ^2(k−1，α) と比較．
  - 棄却域の取り方に注意！

第14章Ⅶ. 適合度の検定 （5）

先ほどのサイコロの例で検定問題を考えよう.

出た目	1	2	3	4	5	6	計
観測度数	9	13	5	11	16	6	60
期待度数	10	10	10	10	10	10	60

- 有意水準α＝0.05とする.
- 理論分布＝離散型一様分布（各目の出る確率が等しい）.
- 帰無仮説H_0：各目の出る確率がすべて1/6
  対立仮説H_1：H_0の否定
- カテゴリー数m＝6より食い違い度χ_0^2は自由度 6−1= 5のχ^2分布に従う.
- χ_0^2の 実現値＝$(9-10)^2/10+(13-10)^2/10+\cdots=8.8$ を自由度5のχ^2分布の上側5%点 $\chi^2(5, 0.05)=11.1$ と比較（見掛け上片側検定）
  → 棄却されない（偏りがあるとは言えない）

【注意】

- 統計量の分布と棄却域の関係は既習のケースの片側検定の場合と同じ.
  （ただし分布の偏りに方向性を仮定しないという意味では両側検定）

あらためて第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定
Ⅲ．母分散の検定　・・・割愛しました
Ⅳ．平均値の差の検定
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定
Ⅶ．適合度の検定　・・・ここまで終わった
Ⅷ．独立性の検定　・・・次ここ

第14章Ⅷ．独立性の検定（3）

独立性の検定の例続き（期待度数の求め方）

「2つの属性A,Bが互いに独立」とは（教科書では定義が曖昧）：

属性A（例：瞳の色）に関する事象A_i（例：瞳が青）と

属性B（例：頭髪の色）に関する事象B_j（例：金髪である）が

常に独立であるということ（と考えるのが自然である！）

すなわち，

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \times P(B_j)$$

がすべてのA_i, B_j の組合せについて成り立つ

を「2つの属性 A, B が互いに独立」であることの定義とすべき．

- これをもとに期待度数を決定し．適合度検定の手法を適用．
- ［瞳の色がA_iである］［頭髪の色がB_jである］の確率は，分割表から得られる比率を推定値として用いる．

S. TOKUNAGA

第14章Ⅷ. 独立性の検定（4）

独立性の検定の例続き（期待度数の計算）

たとえば・・・

- ［青い瞳の確率（推定値）］＝40/100,
- ［ブルネットの確率（推定値）］＝60/100

として，「青い瞳」と「ブルネットの頭髪」が独立なら

［青・ブルネットの確率］＝（40/100）×（60/100）＝0.24

と考える.

∴［青・ブルネットの期待度数］＝100×0.24＝24

瞳＼頭髪	金	ブルネット	計
青	27(16)	13(24)	40
緑	2(2)	3(3)	5
褐色	11(22)	44(33)	55
計	40	60	100

第14章Ⅷ. 独立性の検定（5）

一般の場合：

（「A_iかつB_j」の観察度数を X_{ij}，期待度数をY_{ij}とする）

$Y_{ij} = N \times P(A_i \cap B_j)$

$= N \times P(A_i) \times P(B_j)$　　←ここで独立性を使った

$\fallingdotseq N \times (a_i / N) \times (b_j / N) = a_i b_j / N$

↑確率の推定値↑

（ $a_i = \Sigma_j X_{ij}$, $b_i = \Sigma_i X_{ij}$, $N = \Sigma_i a_i = \Sigma_j b_i = \Sigma_i \Sigma_j X_{ij}$ ）

A＼B	B_1	…	B_n	計
A_1	X_{11}	…	X_{1n}	a_1
…	…	…	…	…
A_m	X_{m1}	…	X_{mn}	a_m
計	b_1	…	b_n	N

第14章Ⅷ. 独立性の検定（6）

独立性の検定の例続き（独立性の検定の手続き1）

- 帰無仮説H_0：2つの属性が互いに独立
  - すなわち分割表の各セル（2つの属性の組み合わせで決まるカテゴリーに対応）に属する確率が，独立性の仮定に基づいて与えられる.
  - 対立仮説H_1：2つの属性が互いに独立でない
- 以下の定理を用いる：

定理 総度数nが十分大きいとき，r行c列の分割表における

$$\chi_0^2 = \Sigma((\text{観測度数} - \text{期待度数})^2 / (\text{期待度数}))$$

（食い違い度）は近似的に自由度(r−1)(c−1)のχ^2（カイ二乗）分布に従う.

- 有意水準αのとき，χ_0^2の実現値を，自由度(r−1)(c−1)のχ^2分布の上側100α%点 $\chi^2((r-1)(c-1),\ \alpha)$ と比較.
  - 棄却域の取り方に注意！

第14章Ⅷ. 独立性の検定（7）

独立性の検定の例続き（独立性の検定の手続き2）

（有意水準は1％としておいた）

統計量 $\chi_0^2 = (27-16)^2/16 + (13-24)^2/24 + \cdots + (44-33)^2/33 = 21.711$

（食い違い度）を自由度 (3−1)(2−1) = 2 の χ^2分布の上側1％点 $\chi^2(2, 0.01) = 9.21$と比較.

→有意水準1％で棄却される（瞳と頭髪の色は独立ではなく，関連あり）.

瞳＼頭髪	金	ブルネット	計
青	27（16）	13（24）	40
緑	2（2）	3（3）	5
褐色	11（22）	44（33）	55
計	40	60	100

[再確認]第14章 検定　の内容

Ⅰ. 検定

Ⅱ. 母平均の検定

- 母分散既知の場合と未知の場合
- KEYWORDS: t分布，自由度，etc…

Ⅲ. 母分散の検定　　←割愛

Ⅳ. 平均値の差の検定

- KEYWORDS: t分布，統合分散，etc…

Ⅴ. 等分散の検定

- KEYWORDS: F分布，自由度対，etc…

Ⅵ. 比率の検定

- 推定との違いに注意！
- KEYWORDS: 正規近似，etc…

Ⅶ. 適合度の検定

- KEYWORDS: χ^2 分布，観測度数（観測値），期待度数（理論値），etc…

Ⅷ. 独立性の検定

- KEYWORDS: χ^2 分布，分割表，etc…