

統計(医療統計)

第9回 検定の基礎

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部 数学講座

第13章 推定

I. 母集団と標本

II. 点推定

- 不偏性, 不偏推定量

*** 前期試験範囲ここまで***

III. 区間推定

IV. 母平均の区間推定

1. 母分散が既知のとき
2. 母分散が未知のとき

V. 母分散の区間推定

VI. 母比率の区間推定

[復習] III. 区間推定

区間推定とは

- ◎ 「母数の値をズバリ推定するより, 母数が(高い確率で)存在する区間を推定する」という考え方.
- ◎ 「推定値が母数にどのくらい近い(誤差がどのくらいあるか)」も含めて推定する.

具体的には

- ◎ 「母数 θ が区間 I に含まれる確率が $O\%$ 」といった形の推定を行なう.
 - ・ 「 θ の推定値 θ' の誤差が確率 $O\%$ で d 以下」と考えても同じ.
 - ・ $|\theta - \theta'| \leq d \Leftrightarrow \theta \in [\theta' - d, \theta' + d] (=I)$
- ◎ \uparrow における
 - ・ 区間... ($O\%$) 信頼区間
 - ・ 確率... 信頼度(または信頼係数)... 95%, 99% など

3

S. TOKUNAGA

[復習] IV. 母平均の区間推定

母平均 μ の区間推定(母分散既知の場合)

問題設定:

- ◎ 標本サイズ n , 標本平均 \bar{X} の実測値が与えられており, 母分散 σ^2 は既知とする.
- ◎ 母集団分布... 正規分布なら好都合だが, 任意の分布でも n が大きければ, 標本平均の分布は中心極限定理により正規分布で近似可能.

以上の条件のもとで,

「 μ の $100\gamma\%$ 信頼区間」

を求める(γ は信頼度 = 信頼係数で, 具体的には 0.95, 0.99, 0.90 など).

→ 続いて信頼区間の求め方, でもその前に...

4

S. TOKUNAGA

[あらためて前期の復習] VI.標本分布 (2)

標本平均の期待値と分散・標準偏差

X_1, X_2, \dots, X_n を平均 μ , 分散 σ^2 である母集団から無作為抽出した標本とすると,

X_1, X_2, \dots, X_n はそれぞれ, 期待値 μ , 分散 σ^2 の互いに独立な確率変数と見なせる.

よって標本平均 \bar{X} について

$$E(\bar{X}) = \mu \times n \times (1/n) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma^2 \times n \times (1/n)^2 = \sigma^2/n$$

(期待値・分散の加法性↑) (↑積に関するE,Vの性質より)

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{(\sigma^2/n)} = \sigma / \sqrt{n}$$

S. TOKUNAGA

5

[前期の復習]標本平均の分布・まとめ (対比して再確認)

定理(正規分布の性質より)

X_1, X_2, \dots, X_n を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集団から無作為抽出した標本とすると

$$\text{標本平均 } \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

定理(中心極限定理の系)

X_1, X_2, \dots, X_n を平均 μ , 分散 σ^2 である任意の母集団から無作為抽出した標本とすると,

標本サイズ n が十分大きければ, 近似的に

$$\text{標本平均 } \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

となる.

★以上を踏まえて区間推定の具体的な方法へ

6

[復習] IV. 母平均の区間推定

母平均 μ の区間推定(母分散既知)の解法

- ◎ $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ と近似(中心極限定理による).
 - 注意: 正規母集団を仮定すれば厳密.
- ◎ $Z = (\bar{X} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ と標準化すると $Z \sim N(0, 1)$
- ◎ $P(-z(\alpha/2) \leq Z \leq z(\alpha/2)) = \gamma$
 - ただし $\alpha = 1 - \gamma$. $z(\alpha)$ は $P(Z \geq z(\alpha)) = \alpha$ を満たす値.
 - たとえば $\gamma = 0.95$ のとき $\alpha/2 = 0.025$, $z(\alpha/2) = z(0.025) = 1.96$
 - $z(\alpha/2)$ は「上側 $100(\alpha/2)\%$ 点」と呼ばれる.
- ◎ \uparrow を同値変形すると

$$P(\bar{X} - z(\alpha/2) \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + z(\alpha/2) \sigma / \sqrt{n}) = \gamma$$
よって「 μ の $(100 \times \gamma)\%$ 信頼区間」は

$$(\bar{X} - z(\alpha/2) \sigma / \sqrt{n}, \bar{X} + z(\alpha/2) \sigma / \sqrt{n})$$

7

S. TOKUNAGA

[復習] IV. 母平均の区間推定

教科書 p.107 例題1

コレステロールの平均値 μ の区間推定

- ◎ 母集団・・・成人男子
(正規分布は p.106 で仮定)
 - ◎ 標本サイズ $n = 36$ (人)
 - ◎ 標本平均 $\bar{X} = 63$ (mg/dl)・・・ μ の点推定値
 - ◎ 母標準偏差 $\sigma = 12$ (mg/dl)
- 以上の条件のもとで,
「 μ の 95% 信頼区間を求めよ」という問題.
(信頼度 95%)

8

S. TOKUNAGA

[復習] IV. 母平均の区間推定

例題1に関する補足

- ◎ 正規母集団の仮定がどこにも明記されていなければ、下記のいずれかの方針で考える。
 - 正規母集団に十分近い分布であると考えて、正規母集団の仮定を導入
 - $n=36$ を十分大きいと見なし、標本平均の分布を正規分布で近似(中心極限定理より).
- ◎ 公式 $(\bar{X} - z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n})$ に値を代入すれば一応答えは出ます.
- ◎ 母標準偏差 σ の値が既知というのは、かなり虫のいい仮定。
 - 現実的にはあまりないケースと思われるが、基本的な原理と手法を理解するためにあえて導入している.

9

S.TOKUNAGA

[復習] IV. 母平均の区間推定

「 μ の $(100 \times \gamma)\%$ 信頼区間」:

$$(\bar{X} - z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z(\alpha/2)\sigma/\sqrt{n})$$

について:

- ◎ 標本平均(の実測値)を中心とする区間である.
- ◎ σ/\sqrt{n} は標準誤差と呼ばれる.

[その他の重要な考察]

- ◎ γ を大きくすると・・・
 - $\alpha = 1 - \gamma$ は小さくなる $\rightarrow z(\alpha/2)$ は大きくなる.
 \rightarrow 信頼区間の幅が大きくなる.
(外れる確率を減らすのだから、幅を大きく取る必要があるのは当然)
- ◎ n を大きくすると \rightarrow 信頼区間の幅が小さくなる。
 - 情報量が増えるのだから、誤差が減るのは当然

10

S.TOKUNAGA

[復習] IV. 母平均の区間推定

「母分散既知の場合」のポイントをまとめると

- ◎ 母分散 σ^2 を用いて標本平均の分布が表せる.
- ◎ 母集団分布が正規分布なら標本平均の分布も正規分布.
- ◎ 正規母集団を仮定せずとも, 標本サイズ n が十分大きければ標本平均の分布は正規分布で近似でき, いずれにしても正規分布の問題に帰着できる.
- ◎ だがその(標本平均が従う)正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ は, 母分散 σ^2 を用いて表されているのだから, σ^2 の値がわからないと推測できない.
- ◎ 現実には σ^2 は未知のケースが多い!
→「母分散未知」のケースへ.

11

S.
TOKUNAGA

[復習] IV. 母平均の区間推定 (母分散未知)

母平均 μ の区間推定(母分散未知の場合)

母分散 σ^2 が未知であっても

標本の不偏分散 $U^2 := \{ \sum (x_i - \bar{x})^2 \} / (n-1)$

は, 常にわかる(標本データから計算できる).

そこで母分散未知の場合には:

- ◎ 方針1: U^2 を σ^2 の近似値(推定値)として利用.
 - U^2 は σ^2 の(不偏)推定量ですからね.
 - 「近似」を認めてしまえば, またしても正規分布の問題に帰着. 推定の方法はほとんど同じ.
(U の値を σ のところに代入するだけ. 同じ公式が使える)
 - 標本サイズが大きければ, 良い(誤差の少ない)近似値であることが期待できる.
 - だが小標本の場合は誤差が無視できないはず.
→方針2へ

12

S.
TOKUNAGA

[復習] IV. 母平均の区間推定 (母分散未知)

ここから新しい内容

◎ 方針2: σ^2 を用いずに表せる(U^2 を含む)統計量を導入する

→第11章V

3-その他の重要な標本分布[2] t分布

以下の定理を利用:

定理(教科書p.100)

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの, 大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ について, 標本平均 X' , 不偏分散を U^2 とする. このとき, 確率変数

$$T := (X' - \mu) / (U / \sqrt{n})$$

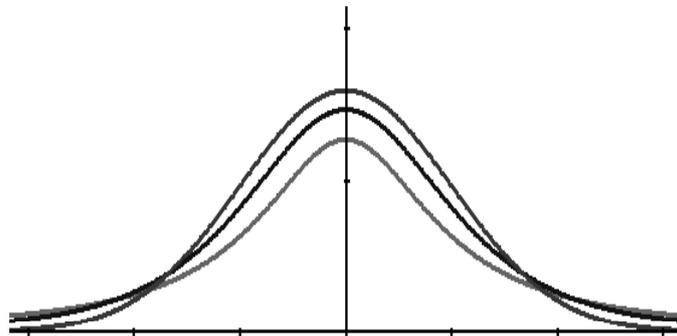
は自由度 $n-1$ の t 分布 (と呼ばれる分布) に従う.

13

S.
TOKUNAGA

[復習] t分布の密度関数のグラフ

(明星大学 船津好明先生のウェブサイトより転載)



青: 自由度3, 暗緑: 自由度1 (赤: 標準正規分布)

14

S.
TOKUNAGA

[復習] IV. 母平均の区間推定 (母分散未知)

t分布について

- ◎ 「スチューデントのt分布」とも呼ばれる.
 - 「スチューデントstudent」は発案者のペンネーム.
 - 定理中の $T = (X' - \mu) / (U / \sqrt{n})$ はスチューデント比とも呼ばれる.
- ◎ 厳密に定義するのは少々やっかいなので省略. ともかく理論的に「わかっている」分布として(巻末の数表などを用いて)利用する.
- ◎ 密度関数の概形は正規分布と似ている. 対称性のある釣鐘型.
- ◎ 自由度と呼ばれるパラメータを持つ.
 - サイズ n の標本から求めたスチューデント比 T においては, 自由度 ν (ギリシヤ文字の「ニュー」) $= n - 1$.
 - 自由度とは大雑把に言えば「独立なパラメータの個数」.
 - ν 大きいほど標準正規分布 $N(0,1)$ に近づき, $\nu = \infty$ で完全に一致.
 - 自由度 ν のt分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $t_{\nu}(\alpha)$ または $t(\nu, \alpha)$ で表す.
 - $t_{\nu}(\alpha)$ の値は教科書p.137の表から.

[復習] IV. 母平均の区間推定 (母分散未知)

注意と補足

- ◎ 「正規母集団」の仮定はt分布を利用する上で本質的に重要.
- ◎ 標本平均 X' の標準化変数:
 $Z = (X' - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ との類似に注意.
 - つまり n が大きければ, $T \doteq Z$ であるということ.
(ただし, 今考えているのは n が小さいケースでした)

[復習] IV. 母平均の区間推定 (母分散未知)

t分布を利用した μ の推定

- 母分散 σ^2 が未知の正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの、大きさ n の無作為標本 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ について、標本平均 \bar{x} , 不偏分散を U^2 とする。
このとき

$$t = (\bar{x} - \mu) / (U / \sqrt{n}) \sim (\text{自由度}n-1\text{の}t\text{分布})$$

だから

- 母平均 μ の信頼度 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間は

$$(\bar{x} - t_{n-1}(\alpha/2) U / \sqrt{n}, \bar{x} + t_{n-1}(\alpha/2) U / \sqrt{n})$$

【注意】やっけることは母分散既知の場合と大差ない。自由度という新たなパラメータが出てきただけ。

[RECALL] 母分散既知の場合の μ の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間:

$$(\bar{X} - z(\alpha/2) \sigma / \sqrt{n}, \bar{X} + z(\alpha/2) \sigma / \sqrt{n})$$

[復習] IV. 母平均の区間推定 (母分散未知)

例題2(教科書p.108)

- 母集団: 成人女性HDLコレステロール値
(正規母集団はp.106で仮定)
- 標本サイズ $n=10$, 標本平均 $\bar{x}' = 70$
- 標本の不偏分散 $U^2 = 14 \times 14 \times (10/9) \dots \star$
(「標準偏差」の定義に注意!)
- 信頼度=0.95

[解答]

自由度 $=n-1=10-1=9$

教科書p.137の表より $t_9(0.025) = 2.262$ を読み取る。

95%信頼区間は

$$(\bar{x}' - t_{n-1}(0.025) U / \sqrt{n}, \bar{x}' + t_{n-1}(0.025) U / \sqrt{n})$$

に該当する値を代入して

$$= (\quad , \quad)$$

V. 母分散の区間推定

都合により割愛します

→VI. 母比率の区間推定 へ

19

S.
TOKUNAGA

[復習] VI. 母比率の区間推定

「母集団比率に関する推測」とは

- ◎ ベルヌーイ母集団に関する推測.
 - 2項分布の応用.
 - ある程度大きな標本を扱うケースがほとんどなので, たいていは「2項分布の正規近似」を利用する.

- ◎ 「世論調査の類」. 支持率調査など, 身近に興味深い例が多い.
 - 「統計的な理解を深めるよいチャンス」.

20

S.
TOKUNAGA

[復習] VI. 母比率の区間推定

2項分布の正規近似RECALL

中心極限定理により, n が十分大きいとき,

$B(n, p)$ は $N(np, np(1-p))$ で近似できる.

∴ $B(n, p)$ に従う確率変数は, $B(1, p)$ (という同一の分布)に従う独立な n 個の確率変数の和と見なせるから.

◎ 従って, 標本比率 $P=X/n$ の分布も,
正規分布 $N(p, p(1-p)/n)$ で近似できる.

◎ さらに P の標準化変数:

$$Z = (P-p) / \sqrt{p(1-p)/n}$$

は近似的に標準正規分布に従う.

◎ 分布が決まれば, あとはこれまでと同じ考え方で進めればよいはず(?)

[復習] VI. 母比率の区間推定

とりあえずやってみる.

(以下母比率を p , 標本比率 $P=X/n$ の実現値を P_0 とする)

$$Z = (P-p) / \sqrt{p(1-p)/n}$$

が近似的に標準正規分布に従うので

$$P(-z(\alpha/2) \leq (P_0-p) / \sqrt{p(1-p)/n} \leq z(\alpha/2)) = 1-\alpha$$

左辺のカッコ内を同値変形すると

$$P_0 - z(\alpha/2) \sqrt{p(1-p)/n} \leq p \leq P_0 + z(\alpha/2) \sqrt{p(1-p)/n}$$

すなわち, 区間:

$$(P_0 - z(\alpha/2) \sqrt{p(1-p)/n}, P_0 + z(\alpha/2) \sqrt{p(1-p)/n}) \quad \dots (*)$$

に母比率 p が含まれる確率が $1-\alpha$.

ところが(*)は未知数である p そのものを含んでいるので, これをそのまま信頼区間とすることはできない!

そこで...

[復習] VI. 母比率の区間推定

推定を行う際は,

$$(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{p(1-p)/n}, P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{p(1-p)/n})$$

において p を近似値(推定値) P_0 で置き換える.

すなわち信頼度 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間は:

$$(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n}, P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n})$$

★ただし, 誤差の最大値を見積もりたいときは $p=0.5$ を採用.

- $p(1-p)$ は $p=0.5$ のとき最大値0.25を取ることに注意
(2次関数のグラフを思い出せ!).
- 「誤差の最大値を見積もりたいとき」の例:
→誤差が一定値以下となるような標本サイズを決定する問題など.
(標本サイズを決定する時点では P_0 の値は得られていない!)

★(14章でやる)「母比率の検定」との違いに注意!

23

S.
TOKUNAGA

第13章 推定

I. 母集団と標本

II. 点推定

- 不偏性, 不偏推定量
*** 前回ここから ***

III. 区間推定

IV. 母平均の区間推定

1. 母分散が既知のとき
2. 母分散が未知のとき

V. 母分散の区間推定

VI. 母比率の区間推定

*** 前回ここまで ***

24

S. TOKUNAGA

(誤差の評価に関する考察例)

From TV News

The Governor of Tokyo said...

“I don't believe the
opinion poll, because
they surveyed only 1000
people or so.”

(世論調査の結果について
記者から感想を尋ねられ
たのを受けて)



25

S.
TOKUNAGA

Is 1000 too small?

1000 is :

$1000/127,500,000 = 1/127,500 = 0.00078\%$ of the
total population of Japan, and

$1000/12,140,000 = 1/12,140 = 0.0082\%$
of the total population of Tokyo.

(確かに母集団と比較すれば小さいが...)

But!

26

S.
TOKUNAGA

Calculation of SE

- ◎ n: sample size
- ◎ p: population rate
- ◎ SE: Standard Error

$$SE = \sqrt{p(1-p)/n}$$

$$= \sqrt{0.5(1-0.5)/1000} = 0.0158$$

If p is around 0.1, then

$$SE = \sqrt{0.1(1-0.9)/1000} = 0.00949 \doteq 1\%$$

27

S.
TOKUNAGA

Estimation of error (誤差の評価)

$SE = \sqrt{p(1-p)/n}$ depends only on p and n,
i.e., it does not depend on the size of population!

(母集団の大きさは誤差に影響しない!)

- ◎ In this case, the value of the error is around 2-3%.
(計算してみましょう)
- ◎ If $n=1000 \times 4=4000$, the error is reduced by half.
- ◎ In many case, the estimation by a sample with $n=1000$ is reliable.
(ただし無作為抽出が厳密に行われているという前提で)
- ◎ On the other hand, we assume random sampling in the above estimation, which can be suspected.

28

S.
TOKUNAGA

平成14年度試験問題より

「2002年10月1日付けの朝日新聞記事によれば、最近5年間の日本棋院のプロ公式戦15000局において、黒盤勝率は51.86%であった。」

(2)日本棋院は現行ルール(注:2002年当時)では先手が有利であるとしてルールの改正を決定した。この判断についてどう思うか。仮説検定の考えを用いて考察せよ。

【参考】朝日新聞の解説(ちなみに東京版夕刊の1面):

「厳しい勝負の世界ではわずか2%の違いも無視できない」

↑「そりゃ違うだろ!」と突っ込むところ。

- ◎ 標本サイズが大きいから誤差は小さく、わずかな差も無視できない(14章で学ぶ仮説検定の用語を用いれば「有意差がある」)のであって、「勝負の厳しさ」とは無関係。

29

S.
TOKUNAGA

推定から検定へ

- ◎ もう数学的に重要な部分の大半は出尽くした。区間推定がわかっているならば検定も簡単!
(のはず)
- ◎ 基本的なアイデアを正しく理解することが重要。
 - 計算だけなら中学生でもできるしパソコンがやってくれる
- ◎ 推定と検定を混同しないこと!
 - 単なる手法の違いというよりは、発想が根本的に異なる。

30

S.
TOKUNAGA

第14章 検定 の内容

- I. 検定
- II. 母平均の検定 . . . 今回ここまで
(ただし時間切れで少し残ってしまいました)
- III. 母分散の検定 . . . 割愛します
- IV. 平均値の差の検定
- V. 等分散の検定
- VI. 比率の検定
- VII. 適合度の検定
- VIII. 独立性の検定

第14章 I. 検定

仮説検定とは

- ◎ (帰無)仮説:
「事前の情報や経験から抱いている既存のイメージ」
- ◎ その(帰無)仮説を疑いたくなるような状況が生じたとする.
 - その「疑い」に基づく(帰無仮説を否定する)仮説を対立仮説という.
(ただし単に「仮説」という場合は帰無仮説の方を指します)
- ◎ まず(帰無)仮説が正しいとして(本当は疑いつつ), 推論を行う. 一種の背理法的思考.
 - 「矛盾を導く」代わりに「確率が非常に低い(0に近い)」ことを示すこと
によって帰無仮説を否定.
- ◎ 標本データから得た情報と(帰無)仮説に基づく推論の結果を照らし合わせ, 仮説の真偽を判断する.

第14章 I . 検定

1-検定の原理

- ◎ p.113例1:「甲状腺疾患患者の10人の血清アルブミンを測定したら健常人の60%しかなかったが, この疾患では血清アルブミンが低値になると断定してよいだろうか」
 - 標本の実現値と理論値(期待値)は一致しないのが普通だが, その差異がばらつきとして許容できる範囲内なのか, 意味のある差異なのか, が問題.
 - 仮に90%なら: おそらく健常人のばらつきの範囲
 - 10%なら: 明らかに異常 ⇒ どこかに判定上の境界があるはず!
 - 「減ることはない」と仮説(帰無仮説)を立て, この仮説が否定できるかどうかを調べる.
 - 確率の理論から言って誤差の範囲内とは考えられない差異があると判断できるとき, 仮説は否定(棄却)され, 「(差が)有意である」「有意差がある」という.

- ◎ p.113例2:「サイコロを60回投げたら1の目が25回も出た. 理論的には(すなわち期待値としては)1の目は10回(程度)出るはずである. この差異は大きすぎないだろうか」
 - 「サイコロは正常」という(帰無)仮説を立て, 「25回」が正常なサイコロのばらつきの範囲内かどうかを調べる.

33

S.
TOKUNAGA

第14章 I . 検定

2-帰無仮説, 対立仮説と2種類の過誤

- ◎ 最初に設定した仮説: 帰無仮説. 通常 H_0 で表す.
- ◎ 帰無仮説を否定したとき受け入れる仮説:
 - 対立仮説. 通常 H_1 で表す.
- ◎ 帰無仮説 H_0 を否定することを, H_0 を棄却するという.
- ◎ H_0 が棄却されないとき, H_0 を採択するという.
- ◎ さきほどの例1だと
 - H_0 : 「甲状腺疾患にかかっても血清アルブミンに変化はない」
 - H_1 : 「変化する」(もしくは「増える」, 「減る」)
 - 医学的見地から増えることはあり得ないならば, H_1 は「減る」としてもよい(→後述の「片側検定」の例).

34

S.
TOKUNAGA

第14章 I . 検定

2-帰無仮説, 対立仮説と2種類の過誤(続き)

- ◎ 第1種の過誤: 本当は H_0 が正しいのに H_0 を棄却して H_1 を採択してしまう.
 - 第1種の過誤を犯す確率を危険率あるいは有意水準といい, 通常 α で表す.
 - 仮説検定では有意水準を事前に設定して推論を行う.
 - 習慣的に, $\alpha = 0.05, 0.01$ とすることが多い.
- ◎ 第2種の過誤: 本当は H_0 が間違っているのに H_0 を採択してしまう.
 - 第2種の過誤を犯す確率を通常 β で表し, $1 - \beta$ を検出力という.
 - 仮説検定では多くの場合, H_0 を棄却することによって何かを主張するので, 検出力は高い方が望ましい.

S.
TOKUNAGA

第14章 I . 検定

注意と補足

- ◎ (あたりまえだが) 仮説検定による判断は実際の真偽と一致するとは限らない. あくまで客観的・合理的な判断をするための1つの手法.
- ◎ 必然的に確率の評価を含んだ判断となる.
 - 判断の基準となる確率が有意水準
- ◎ 典型的な例・・・新薬や新しい治療法のテスト
 - まず「効果がない」という帰無仮説を立てて推論
→ 臨床試験のデータを分析した結果, 帰無仮説を否定できれば, 「効果がある」と判断できる.

36

S.
TOKUNAGA

第14章 I . 検定

3-片側検定と両側検定

棄却域: 検定に用いる統計量(検定統計量)において, 棄却することが決定される範囲. 棄却域の補集合が採択域.

母数 θ に対し, 帰無仮説を $H_0: \theta = \theta_0$ とするとき, 対立仮説 H_1 の立て方により以下のように分類:

- ◎ 両側検定: H_1 は H_0 の単純な否定, すなわち

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

- ◎ 片側検定: H_1 は大小関係を考慮した H_0 の否定, すなわち

$$H_1: \theta > \theta_0 \text{ (右片側検定) または}$$

$$H_1: \theta < \theta_0 \text{ (左片側検定)}$$

- 異なっているとすれば確実に大きい, あるいは小さいことが予測される(逆の可能性を無視してよいと考えられる)ときにはこちら.

★教科書p.114図14で棄却域の違いを確認.

★基本は両側検定. 片側検定では明確な根拠が示されるべき.

37

S.
TOKUNAGA

第14章 I . 検定

4-検定の手順

- ① 帰無仮説 H_0 , 対立仮説 H_1 , 有意水準 α を定める.
- ② 標本から統計量(検定統計量)を求める.
- ③ 検定統計量の分布を調べ, その実現値が棄却域に入るかどうか調べる.
- ④ 棄却域に入れば H_0 を棄却して H_1 を採択, 入らなければ H_0 を採択.

【注意】 H_0 が棄却できなかつたとき, 便宜上「 H_0 を採択」というが, 「棄却できない」ことは「 H_0 の正しさ」を積極的に主張するものではない!

- 単に「否定はできなかつた」ということ. 仮に H_0 が間違っているとしても, 検定統計量が「たまたま」採択域に入ることは十分あり得る.
- 「背理法で証明しようとしたら矛盾が導けなかつた」ようなもの. ある意味検定の「失敗」.

S.
TOKUNAGA

第14章 II . 母平均の検定

母平均 μ に関して

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0$$

を検定する.

- ◎ 通常, H_0 が正しくないことを期待して行う.
- ◎ とりあえず正規母集団を仮定.
 - 【注意】一般に, 母集団分布として特定の分布(正規分布など)を仮定して行う検定をパラメトリック検定, そうでないものをノンパラメトリック検定という. この授業ではパラメトリック検定のみ扱う(したがって必然的に, 母集団分布の仮定には常に留意する必要がある).
- ◎ 以下, 標本サイズを n , 標本平均を X' , 有意水準を α とする

1-母分散が既知のとき

母分散を σ^2 とする. X' の標準化変数 $Z = (X' - \mu_0) / (\sigma / \sqrt{n})$ が (正規母集団の仮定のもとでは厳密に) 標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので, これを検定統計量とする.

両側検定の場合(対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$):

- ◎ $|Z| \geq z(\alpha/2)$ ならば H_0 を棄却.
- ◎ $|Z| < z(\alpha/2)$ ならば H_0 を棄却しない(採択).

S.
TOKUNAGA

第14章 検定 の内容

- I. 検定
- II. 母平均の検定 . . . 今回このあたりまで
(時間切れで少し残ってしまいました)
- III. 母分散の検定 . . . 割愛します
- IV. 平均値の差の検定
- V. 等分散の検定
- VI. 比率の検定
- VII. 適合度の検定
- VIII. 独立性の検定

40

S.
TOKUNAGA