# 統計II（MI）
## 第6回　独立性の検定

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

# [再確認] 統計 II の内容

以下の順序でやってきました：

- 6.1 母分散が未知の場合の母平均の推測 (t分布)
- 6.4 対応のある2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (t分布)
- 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測
- 6.3 等分散の検定 (F分布)
- 6.5 母集団比率に関する推測 (正規近似)
- 6.6 適合度検定 ($\chi^2$検定)

(前回6.6の途中まで)

# 今日の授業の概要：

- 前回の復習（適合度検定）
- 「6.6 適合度検定（$\chi^2$検定）」の残り

では復習から

## [復習] 平成14年度試験問題より

2002年10月1日付けの朝日新聞記事によれば、最近5年間の日本棋院のプロ公式戦15000局において、黒盤勝率は51.86%であった。

(2) 日本棋院は現行ルールでは先手が有利であるとしてルールの改正方針を決定した。この判断についてどう思うか。仮説検定の考えを用いて考察せよ。

【参考】朝日新聞の解説(ちなみに東京版夕刊の1面)：

「厳しい勝負の世界ではわずか2%の違いも無視できない」

↑「そりゃ違うだろ！」と突っ込むところ.

- 標本サイズが大きいからわずかな差でも有意となるのであって、「勝負の厳しさ」とは無関係.

★適当な有意水準を設定して検定問題を解いてみましょう.

(帰無仮説: [先手の勝つ確率] ＝0.5)

# [復習] 6.6 適合度検定（$\chi^2$分布）その1

- <u>このセクションで扱う問題について：</u>
- 「観察結果が，数量でなくて，いくつかのカテゴリーに分類され，その度数で示される場合」の検定問題（教科書より）．
- ある意味2項分布の一般化（多項分布）の問題．
- 各カテゴリーごとに「入るか否か」を考えると2項分布の問題となる．
  - 「ここではそうではない．個々にではなく，一度に総括的に検定しようというのである」（教科書より）．

# [復習] 6.6 適合度検定（$\chi^2$分布）その2

例：サイコロを60回投げて，それぞれの目の出た度数を調べたところ，以下の結果を得た．

| 出た目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 度数 | 9 | 13 | 5 | 11 | 16 | 6 | 60 |

この目の出方は偏っているといえるか?
→「偏りはない」という帰無仮説をたてて検定．

【注意】

- 1つの目に注目して「確率1/6で出るかどうか」を検定するなら6.5でやった「母比率の検定」．
- ここではそうではなくて，6つの目の出方を一度に扱う．

# [復習] 6.6 適合度検定（$\chi^2$分布）その3

$\chi^2$分布（と呼ばれる既知の分布）を導入.
以下の定理を用いる：

**定理6.4**

総度数nが十分大きいとき，カテゴリーの個数がmならば

$X = \Sigma$（（観察度数－期待度数）$^2$ / （期待度数））

（食い違い度）は自由度m-1の$\chi^2$分布に従う.

【注意】

各カテゴリーの度数は総度数に縛られるので，

自由度は「（カテゴリー数）－１」.

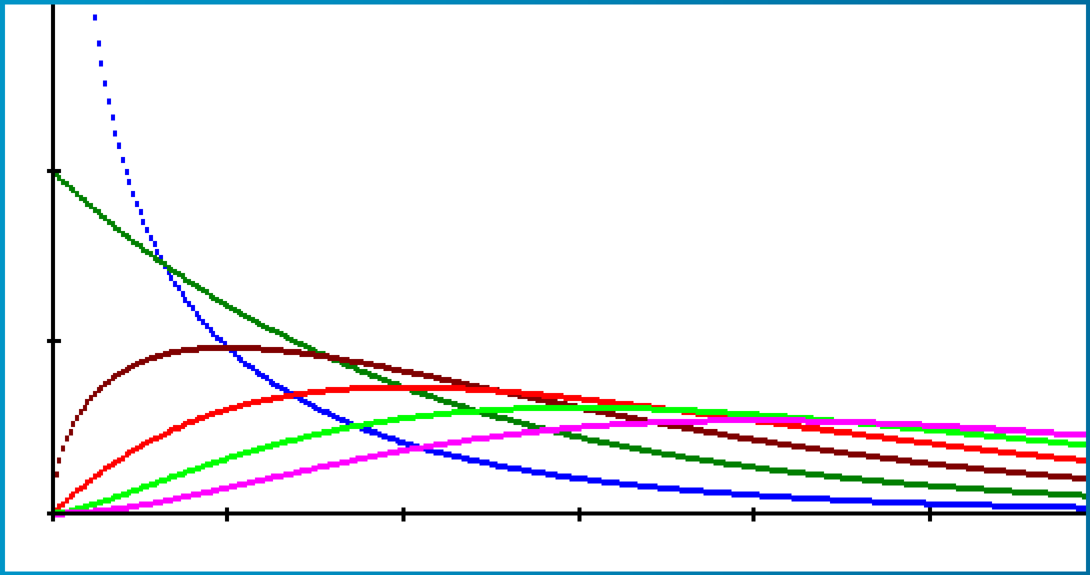
# [復習] 6.6 適合度検定（$\chi^2$分布）その4

## $\chi^2$分布について：

- $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ が独立かつN(0,1)に従うとき，

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2$$

  は自由度kの$\chi^2$分布に従う．
- グラフ（自由度n=1〜6, 作成は明星大学の船津好明先生）：



n=1,2では単調減少, n≧3ではnが増大するとピークが右へ移動

# [復習] 6.6 適合度検定（$\chi^2$分布）その5

冒頭のサイコロの例で検定問題を考えよう．

表6.2

| 出た目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 観測度数 | 9 | 13 | 5 | 11 | 16 | 6 | 60 |
| 期待度数 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 60 |

- 有意水準$\alpha$＝0.05とする．
- 帰無仮説$H_0$：各目の出る確率がすべて1/6
  対立仮説$H_1$：$H_0$の否定（ある目について，[出る確率] ≠1/6）
- カテゴリー数m＝6より食い違い度Xは自由度6－1=5の$\chi^2$分布に従う．
- Xの実現値$X_0$＝（9－10）$^2$/10＋（13－10）$^2$/10＋・・・＝8.8を自由度5の$\chi^2$分布の上側5%点$\chi^2_5$(0.05)＝11.1と比較
  → 棄却されない（偏りがあるとは言えない）

# [復習] 6.6 適合度検定（$\chi^2$分布）その6

**一般に，適合度検定とは：**

- 「観測された度数が，ある特定の理論分布に適合しているか否かの検定」
  - サイコロの例･･･理論分布＝離散一様分布
- 理論分布に基づいて**期待度数**を算出
- 定理6.4を用いて「理論分布に適合している」という仮説を検定．
  - **食い違い度**を求めて棄却域に落ちるかどうかを判定．

# [復習] 6.6 適合度検定（$\chi^2$分布）その7

**適合度検定の例：**

問6.4

以下のデータ（プロシャの10軍団×20年間で，1年間に馬に蹴られて死んだ兵士の数X）はポアソン分布（注：教科書第3章に出てきたが授業では割愛した）に適合しているか？

| 1年間の死亡者数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 軍団の数 | 109 | 65 | 22 | 3 | 1 | 200 |

注：ポアソン分布の公式 $P(X=x) = e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!$ により期待度数が計算できる．以下の手順は同様．

# 独立性の検定 その1

- 2種類の属性が独立であるかどうかの検定.
- やはりχ $^2$分布を) 利用する.
- 手順
  1. 2種類の属性をもとに分割表を作成
  2. 「独立である」という仮説に基づいて期待度数を算出
  3. 定理6.4と類似の定理 (教科書には明記されていない) に基づいて仮説を検定.
     - 食い違い度の計算は同様.
     - 自由度の算出の仕方が異なる

# 独立性の検定 その2

**例題6.6（独立性の検定）**

- 2つの属性（瞳の色と頭髪の色）を観察．
- 瞳の色：3種類×頭髪の色：2 種類＝計6通りの組合せ．

3×2分割表（カッコ内が期待度数）：

| 瞳＼頭髪 | 金 | ブルネット | 計 |
|---|---|---|---|
| 青 | 27（16） | 13（24） | 40 |
| 緑 | 2（2） | 3（3） | 5 |
| 褐色 | 11（22） | 44（33） | 55 |
| 計 | 40 | 60 | 100 |

# 独立性の検定 その3

<u>例題6.6続き（期待度数の求め方）</u>

「2つの属性が互いに独立」とは（教科書では定義が曖昧）：

瞳の色に関する事象［瞳の色が$A_i$である］と

頭髪の色に関する事象［頭髪の色が$B_j$である］が

常に独立であるということ

- すなわち，事象の独立性の定義より
  P（［瞳の色が$A_i$かつ頭髪の色が$B_j$］）
  ＝P（［瞳の色が$A_i$］）× P（［頭髪の色が$B_j$］）
  が各$A_i$, $B_j$ について成り立っている。
- これをもとに期待度数を決定し．適合度検定の手法を適用．
- ［瞳の色が$A_i$である］［頭髪の色が$B_j$である］の確率は，分割表から得られる比率を推定値として用いる（他に情報がないので）．

# 独立性の検定 その4

## 例題6.6続き（期待度数の計算）

たとえば・・・

［青い瞳の確率］＝40/100，［ブルネットの確率］＝60/100

として，「青い瞳」と「ブルネットの頭髪」が独立なら

［青・ブルネットの確率］＝（40/100）×（60/100）＝0.24

と考える

| 瞳＼頭髪 | 金 | ブルネット | 計 |
|---|---|---|---|
| 青 | 27（16） | 13（24） | 40 |
| 緑 | 2（2） | 3（3） | 5 |
| 褐色 | 11（22） | 44（33） | 55 |
| 計 | 40 | 60 | 100 |

# 独立性の検定 その5

**例題6.6続き（独立性の検定の手続き1）**

- 帰無仮説$H_0$：2つの属性が互いに独立
  - すなわち独立性を仮定して求めた各期待度数が，すべて真の値と一致する．
- 対立仮説$H_1$：$H_0$の否定
  - すなわち独立性を仮定して求めた期待度数の中に，真の値と一致しないものがある．
- 対象となる$\chi^2$分布の自由度は（2-1）×（3-1）＝2
  - 属性ごとに総度数の拘束を受けるため．
  - 一般に，r行c列の分割表から計算される食い違い度の自由度は（r－1）×（c－1）．

# 独立性の検定 その6

**例題6.6続き（独立性の検定の手続き2）**

$X_0$＝（27-16）$^2$/16 +（13-24）$^2$/24 +…+（44-33）$^2$/33 ＝21.711

を自由度2の$\chi^2$分布の上側1%点（＝9.21）と比較.

→棄却される（瞳と頭髪の色は独立ではなく，関連あり）.

| 瞳＼頭髪 | 金 | ブルネット | 計 |
|---|---|---|---|
| 青 | 27（16） | 13（24） | 40 |
| 緑 | 2（2） | 3（3） | 5 |
| 褐色 | 11（22） | 44（33） | 55 |
| 計 | 40 | 60 | 100 |

# 独立性の検定 その6

## 教科書p.88の注について

「分割表の小箱の度数が5未満のときは，隣と合併する」

- 「$\chi^2$分布への近似を悪くしないための配慮」
- 特に期待度数が小さいときは，食い違い度に与える影響が大きい．
- 「この場合は情報量の損失が著しく，具合が悪い」→ほんとか？

→やってみよう（青と緑を合併）

| 瞳＼頭髪 | 金 | ブルネット | 計 |
|---|---|---|---|
| 青または緑 | 27+2 (16+2) | 13+3 (24+3) | 40+5 |
| 褐色 | 11 (22) | 44 (33) | 55 |
| 計 | 40 | 60 | 100 |

# 独立性の検定 その6

**例題6で青と緑を合併した場合**

$X_0 = (29-18)^2/18 + (16-27)^2/27 + (11-22)^2/22 + (44-33)^2/33$
$= 18.2\ldots$

自由度（2-1）（2-1）＝1のχ²分布の上側1%点（＝6.63）と比較．

→やっぱり棄却，すなわち独立でない．

★ただし一般には合併により検定結果が変わることはよくあるので注意が必要．

| 瞳＼頭髪 | 金 | ブルネット | 計 |
|---|---|---|---|
| 青または緑 | 27+2（16+2） | 13+3（24+3） | 40+5 |
| 褐色 | 11（22） | 44（33） | 55 |
| 計 | 40 | 60 | 100 |

# [再確認] 第6章の内容

- 6.1 **母分散が未知の場合の母平均の推測**
  - KEYWORDS: t**分布, 自由度**, etc…

- 6.4 **対応のある2標本にもとづく母平均の差に関する推測**
  - KEYWORDS: t**分布, 自由度**, etc…
- 6.2 **独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測**
  - KEYWORDS: t**分布, 統合分散**, etc…
- 6.3 **等分散の検定**
  - KEYWORDS: F**分布, 自由度対**
- 6.5 **母集団比率に関する推測**
  - KEYWORDS: **正規近似**, etc…
- 6.6 **適合度検定**
  - KEYWORDS: $\chi^2$ **分布, 独立性の検定, 分割表, 期待度数**, etc…