統計II（医療統計II）
第6回　適合度検定と独立性の検定

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定
Ⅲ．母分散の検定　　　　←割愛
Ⅳ．平均値の差の検定
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定　　　　←先週ここまで
Ⅶ．適合度の検定
Ⅷ．独立性の検定

では復習から

［復習］ 第14章 Ⅳ. 平均値の差の検定

【あらためて注意】

- 等分散の仮定は本質的.
- 分散が等しい場合について学習したが，そういうケースはたくさんあるのだろうか?
- 例題6でも「男女の分散が等しい」と仮定しているが，そういった仮定はそもそも妥当なのか?
- 分散がほぼ同じであると予想できるが確信が持てない場合というのも多々あるだろう.

→だったら「2つの母集団の分散が等しい」という仮説を検定すればよい！

→（「3-母分散は未知で異なるとき」を飛ばして）

「Ⅴ. 等分散の検定」へ.

[復習] 第14章 V．等分散の検定（その1）

以下の定理を用いる：

定理（教科書p.100）

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に大きさn_1, n_2の標本を無作為抽出し，その標本分散（不偏分散）をそれぞれU_1^2, U_2^2とする．

そのとき$F := U_1^2 / U_2^2$は，

自由度対（$n_1 - \underline{1}, n_2 - 1$）のF分布（と呼ばれる分布）に従う．

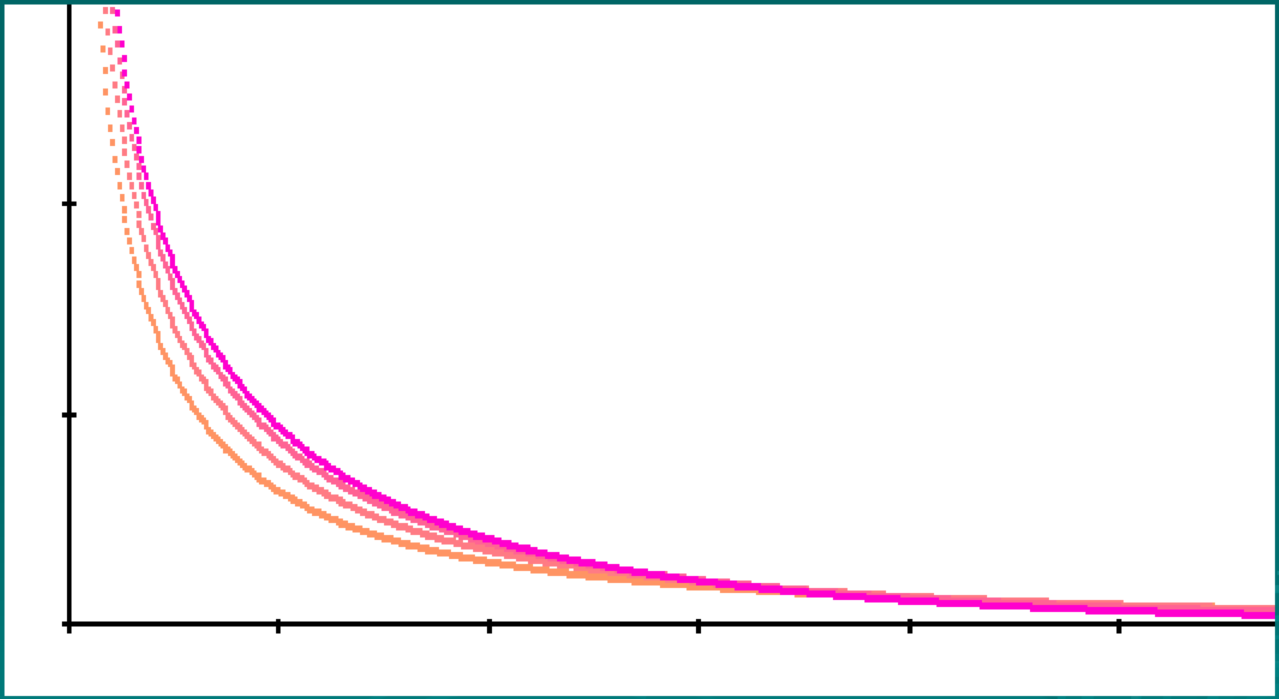
★教科書（第1刷）にミスプリ（脱字）あり．

[復習] 第14章V．等分散の検定（その2）

（グラフは明星大学船津好明先生のWebsiteより転載しています）

F分布の密度関数（1）

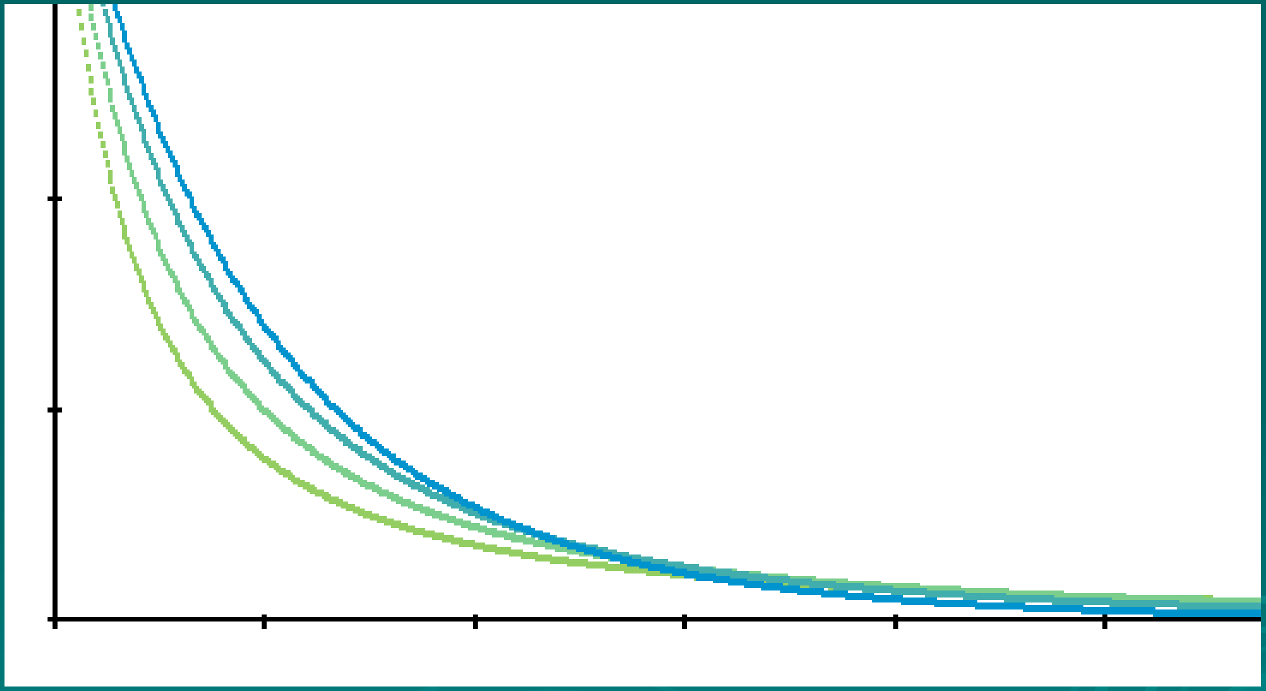
自由度対（1, 1）（1, 2）（1, 5）（1, 20）



[復習] 第14章Ｖ．等分散の検定 (その3)

F分布の密度関数 (2)

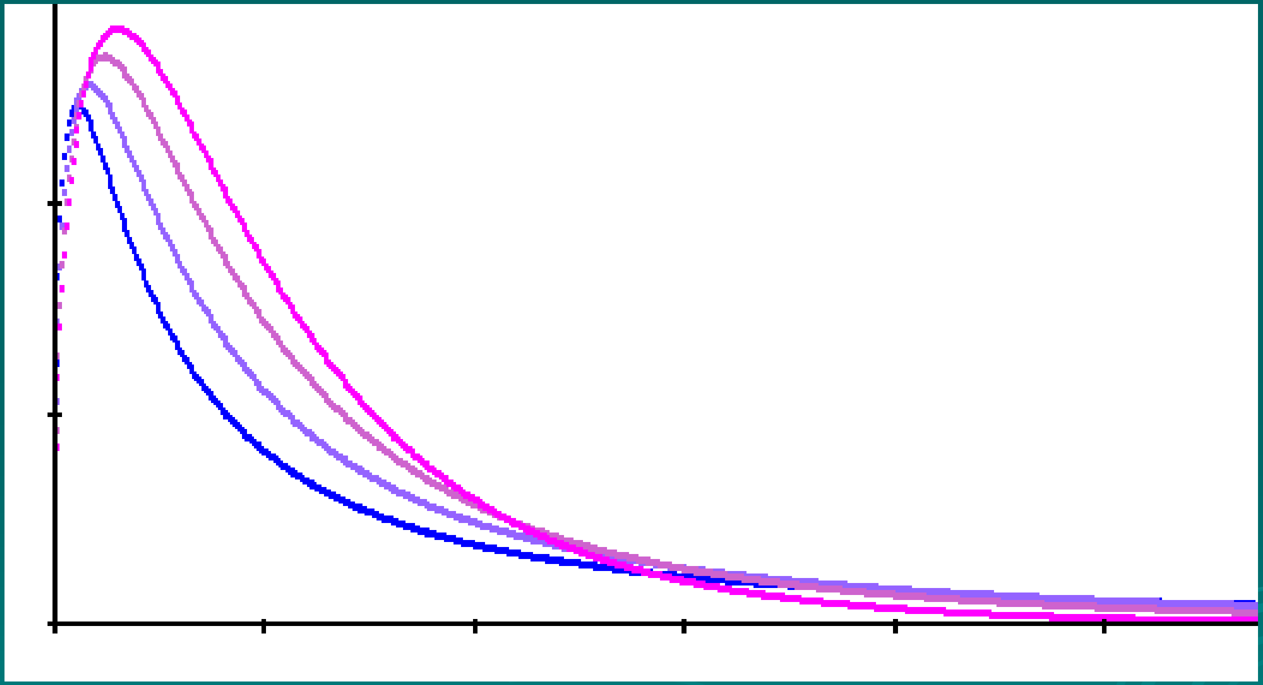
自由度対 (2, 1) (2, 2) (2, 5) (2, 20)



[復習] 第14章V．等分散の検定 (その4)

F分布の密度関数 (3)

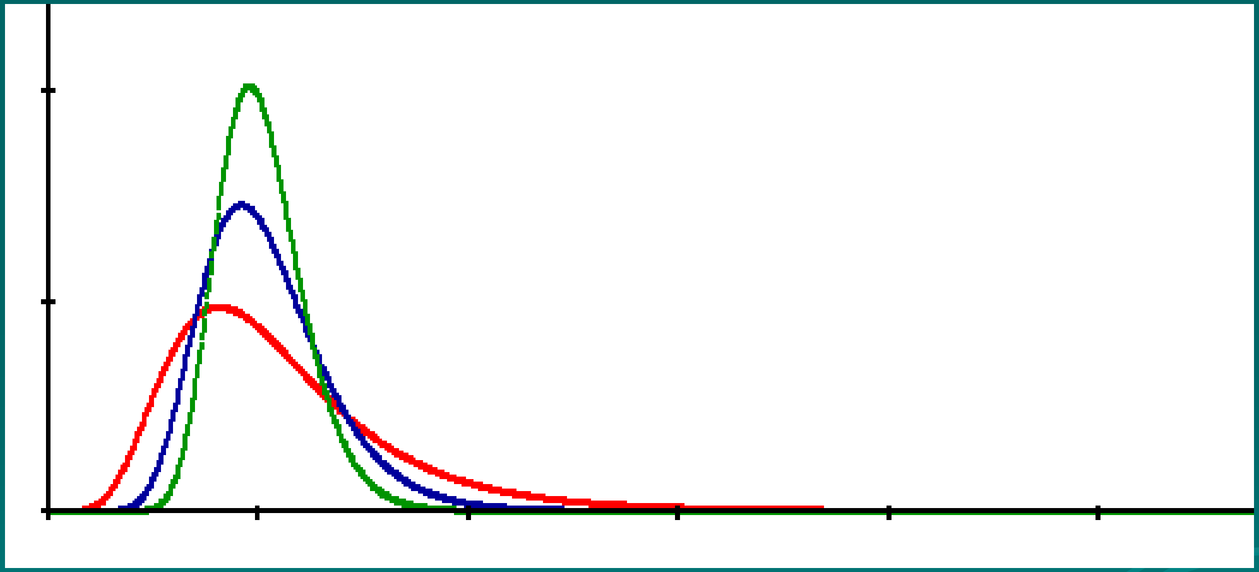
自由度対 (3, 1) (3, 2) (3, 5) (3, 20)



[復習] 第14章V. 等分散の検定 (その5)

F分布の密度関数 (4)

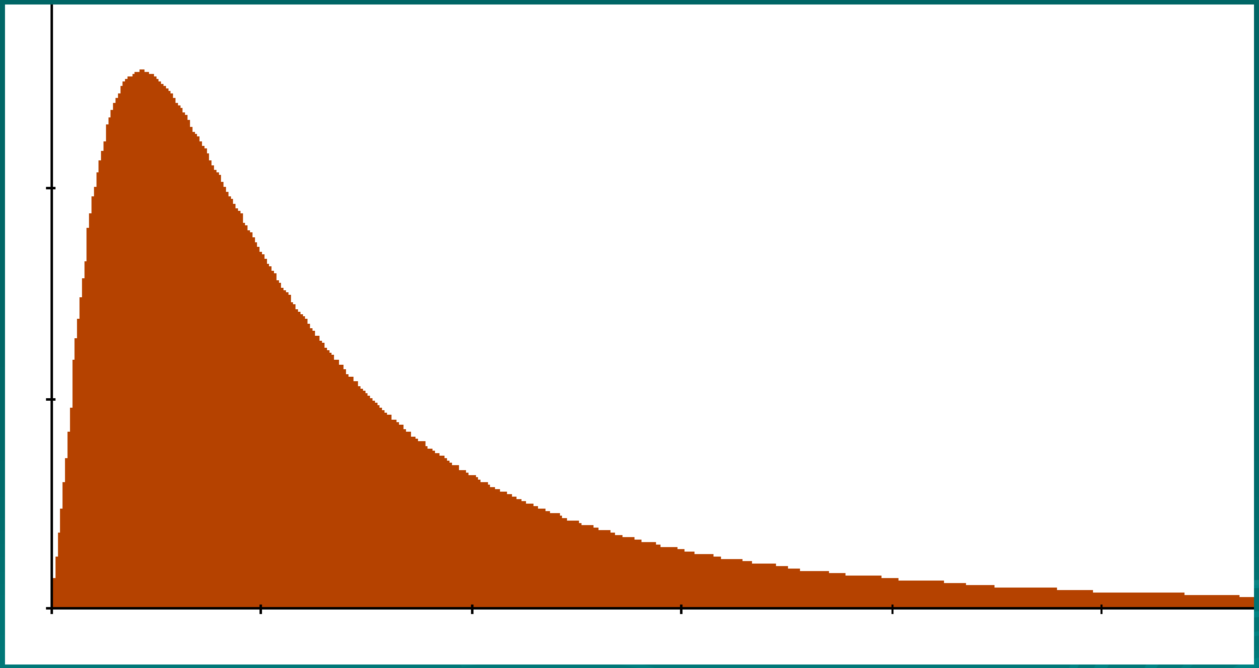
自由度対 (20,20) (50, 50) (100, 100)



[復習] 第14章V．等分散の検定 (その6)

F分布の密度関数 (5)

自由度対 (5, 5)



[復習] 第14章V．等分散の検定 (その7)

等分散の検定

- 定理を利用して

  帰無仮説H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 対立仮説H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

  として有意水準αで**両側**検定.

- F分布の密度関数は非対称だが, $F = U_1^2 / U_2^2$の分母･分子は入れ替え可能なので右側 (上側) だけわかればよい.
  - U_1^2, U_2^2 の実測値のうち大きい方を分子にして比を取る (すなわち [比の値] ＞1となるようにする) .

- 教科書巻末の付表5･6を利用して

  自由度対 $(n_1-1, n_2-1) = (k, l)$ のF**分布**の上側$100(\alpha/2)$%点 $F_l^k(\alpha/2)$ を求める .

教科書p.122,123訂正

p.122 下から3行目

「F＞1としているので~~片側検定でよい~~」

のではなくて，正しくは

「F＞1としているので片側（右側）だけチェックすればよい」

です．あくまで両側検定！

［例題8］解答

誤「これが自由度（7,4）のF分布に従う」

正「これが自由度対（4,7）のF分布に従う」

さらに！

問題文に「有意水準5%で検定せよ」とあるから

$$f_7^4(0.05/2) = f_7^4(0.025) = 5.52$$

を使うべき！

[復習] 第14章Ⅴ．等分散の検定（その8）

例題6の場合

	人数	平均値	不偏分散
男	20	74	3.4
女	17	65	3.8

F_0＝3.8 / 3.4 ＝ 1.12

有意水準α＝0.05で等分散の検定を行なうと：

$F_{19}^{16}(0.05/2) > F_{19}^{16}(0.025)$ ＝2.51＞1.12

よりH_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$は棄却できない．

よって一応両母分散は等しいと見なすことができ，「分散が未知だが等しいことは既知」の場合の平均値の差の検定を行うことができる．

［復習］ 等分散の検定に関する補足

- 通常の検定問題と違い，帰無仮説（＝「等分散仮説」）H_0は棄却されないことを期待している．
- 棄却されなかったからといってH_0の正しさが保証されるわけではない！あくまで「否定できなかった」だけ．
- H_0が棄却される場合は，他の方法を用いなければならない．

  →IV.「3-母分散が未知で異なるとき」

  （今年度は割愛します）

[復習] 14章IV. 平均値の差の検定に関する補足 (その1)

- 教科書では, いずれも独立な (対応のない) 2標本に関する問題を扱った.
  - 「対応のある2標本」⇔「独立な2標本」
- 現実には「対応がある2標本」として扱うべきケースも多い (「対応」を無視するのは合理的ではない)
  - 何組かの一卵性双生児の対を用いてデータを取る.
  - 各人のスタート前とゴール直後の体重の差をデータにする.
  - etc.
- 2標本ではあるが, 対データの差をデータとして解析を行うので, 実質的には1標本問題.
  - 「独立な2標本」の場合よりずっと単純！

［復習］ 14章IV. 平均値の差の検定に関する補足（その2）

- 母分散未知のケースを考える．
  →t分布の利用（正規母集団の仮定が必要）．
- n個の対をなす標本データ (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n) から

  $d_1 = x_1 - y_1$，$d_2 = x_2 - y_2$，…，$d_n = x_n - y_n$

  を算定．
- 2つの母平均をそれぞれ μ_1，μ_2 とし，

  $d' = \Sigma d_i / n$, $s^2 = \Sigma (d_i - d')^2 / (n-1)$ とおくと

  $$T := (d' - (\mu_1 - \mu_2)) / (s / \sqrt{n})$$

  が自由度n-1のt分布に従う．
- 以下はこれまでと同じ要領．

[復習]　14章IV. 平均値の差の検定に関する補足（その3）

「対応のある2標本」に関する推定・検定（まとめ）

(1)［区間推定］母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の信頼係数 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\left(d' - t_{n-1}(\alpha/2)\, s/\sqrt{n},\ d' + t_{n-1}(\alpha/2)\, s/\sqrt{n} \right)$$

(2)［両側検定］

帰無仮説H_0：$\mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説H_1：$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ に対し, 有意水準 α で検定する場合,

$$t_0 := d' / (s/\sqrt{n})$$

とおくと, $|t_0| \geqq t_{n-1}(\alpha/2)$ のときH_0が有意水準 α で棄却される.

(3)［（右）片側検定］

帰無仮説H_0：$\mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説H_1：$\mu_1 - \mu_2 > 0$ に対し, 有意水準 α で検定する場合, $t_0 \geqq t_{n-1}(\alpha)$ のときH_0 が有意水準 α で棄却される.

[復習] 第14章VI. 比率の検定 (1)

2項分布の正規近似RECALL

中心極限定理により，nが十分大きいとき，

B (n,p) **は**N (np, np (1-p)) **で近似できる．**

∵ B (n,p) **に従う確率変数は，** B (1,p) (**という同一の分布**) **に従う独立な**n**個の確率変数の和と見なせるから．**

- **従って，標本比率**P＝X/n**の分布も，**
  正規分布 N (p, p (1-p) /n) **で近似できる．**
- **さらに**P**の標準化変数：**

$$Z = (P-p) / \sqrt{p(1-p)/n}$$

は近似的に標準正規分布に従う．

- **分布が決まれば，推定・検定の考え方は他のケースと同じ．**

ただし・・・

[復習] 第14章VI．比率の検定 (2)

【注意】母比率の推測における推定と検定の違い

以下母比率をp，標本比率P＝X/n の実現値をP_0とする．

- **推定を行う際は，**

  Z= (P－p) /√ (p (1－p) /n) の分母 (Pの標準偏差) のpを近似値 (推定値) P_0で置き換えて計算．すなわち信頼度γ＝1－αの信頼区間は以下のようになった：

  $$\left(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n},\ P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n}\right)$$

  - ただし，誤差の最大値を見積もりたいときはp=0.5 を採用．

これに対し

- **検定の際は**母比率pの値が帰無仮説で (もちろん厳密な値として) 与えられるので，近似の必要がなく，上のような置き換えは**まったく無意味！**
  - Z= (P－p) /√ (p (1－p) /n) に標本比率Pおよび帰無仮説で与えたpの値をそのまま代入して実現値を計算し，棄却／採択を判定すればよい．
  - 検定に対する理解の根本に関わる部分なので，**ここを間違える人は進級させません** . . . がしかし

教科書p.124訂正

［例題9］

Zの分母に標本比率93/103＝0.91を代入しているのは誤り！

帰無仮説H_0：p＝0.75

と考えられるから，正しくは

$Z＝（0.91-0.75）/ \sqrt{}（（0.75×0.25）/103）$

＝3.75

（＞1.64だから棄却されるのは同じ）

第14章VII．適合度の検定（その1）

適合度検定とは：

- 「観測された度数が，ある特定の理論分布に適合しているか否かの検定」
- 「観察結果が，数量でなくて，いくつかのカテゴリーに分類され，その度数で示される場合」の検定問題（昨年の教科書より）．
- 「理論分布に適合している」という仮説を検定．
  - 理論分布に基づいて**期待度数（理論値）**を算出し，**観測度数（観測値）**との食い違いの程度を評価．
- ある意味2項分布の一般化（多項分布）の問題．
  - 各カテゴリーごとに「入るか否か」を考えると2項分布の問題となる．
  - 適合度検定では（個々にではなく）全カテゴリーを一度に総括的に検定．

第14章VII. 適合度の検定（その2）

例：サイコロを60回投げて，それぞれの目の出た度数を調べたところ，以下の結果を得た．

出た目	1	2	3	4	5	6	計
度数	9	13	5	11	16	6	60

この目の出方は偏っているといえるか?

→「偏りはない」という帰無仮説をたてて検定．

【注意】

- 1つの目に注目して「確率1/6で出るかどうか」を検定するならVIでやった「比率の検定」．
- ここではそうではなくて，6つの目の出方を一度に扱う．

第14章VII. 適合度の検定（その3）

χ^2分布（と呼ばれる既知の分布）を導入.
以下の定理を用いる：

定理

総度数nが十分大きいとき，カテゴリーの個数が k ならば

$\chi_0^2 = \Sigma$（（観察度数－期待度数）^{2} /（期待度数））

（食い違い度）は自由度k－1のχ^2分布に従う.

【注意】

- 教科書では観察度数（観測値）をX_i，期待度数をm_iと置いている.
- 各カテゴリーの度数は総度数に縛られるので，
  自由度は「（カテゴリー数）－1」.

第14章VII. 適合度の検定（その4）

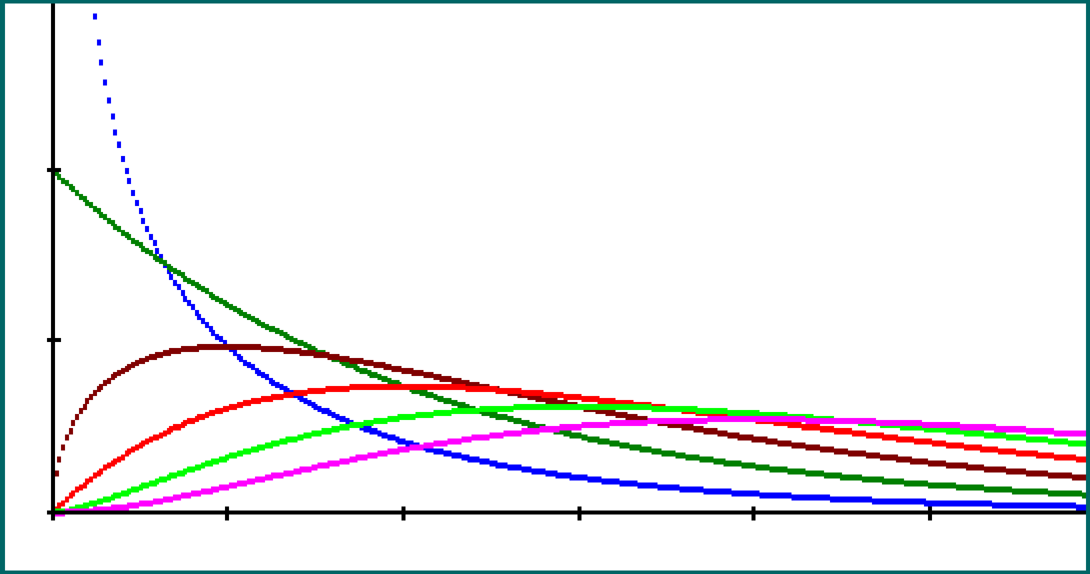
χ^2分布について（教科書p.99参照）：

- $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ が独立かつN (0,1) に従うとき,

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_k^2$$

は自由度kの χ^2分布に従う.

- グラフ（自由度n=1〜6, 作成は明星大学の船津好明先生）：



n=1,2では単調減少, n≧3ではnが増大するとピークが右へ移動

第14章VII. 適合度の検定（その5）

先ほどのサイコロの例で検定問題を考えよう．

出た目	1	2	3	4	5	6	計
観測度数	9	13	5	11	16	6	60
期待度数	10	10	10	10	10	10	60

- 有意水準 $\alpha=0.05$ とする．
- 理論分布＝離散一様分布（各目の出る確率が等しい）．
- 帰無仮説 H_0：各目の出る確率がすべて1/6

  対立仮説 H_1：H_0 の否定（ある目について，［出る確率］$\neq 1/6$）
- カテゴリー数m＝6より食い違い度 χ_0^2 は自由度6－1=5の χ^2 分布に従う．
- χ_0^2 の実現値＝$(9-10)^2/10+(13-10)^2/10+\cdots=8.8$ を自由度5の χ^2 分布の上側5%点 $\chi^2_5(0.05)=11.1$ と比較（片側検定）

  → 棄却されない（偏りがあるとは言えない）

【注意】

- 教科書では自由度 ν の χ^2 分布の上側100α%点を $\chi^2(\nu,\ \alpha)$ と表している．
- 適合度検定は片側検定が原則．

第14章VII. 適合度の検定（その1）

適合度検定の例もうひとつ：

以下のデータ（プロシャの10軍団×20年間で，1年間に馬に蹴られて死んだ兵士の数X）は**ポアソン分布**（教科書p.93参照）に適合しているか？

1年間の死亡者数	0	1	2	3	4	合計
軍団の数	109	65	22	3	1	200

注：ポアソン分布の公式 $P(X=x) = e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!$（教科書p.93のミスプリを再確認してください）により期待度数が計算できる．以下の手順は同様．

第14章VIII. 独立性の検定 その1

- 2種類の属性が独立であるかどうかの検定．
- 適合度検定と同じく χ^2分布を利用する．
- 手順
  1. 2種類の属性をもとに分割表を作成
  2. 「独立である」という仮説に基づいて期待度数を算出
  3. VII. で用いたのと類似の定理に基づいて仮説を検定．
     - 食い違い度の計算はほぼ同様．
     - 自由度の算出の仕方が異なる．
     - やはり片側検定が原則なのは同じ．

第14章VIII. 独立性の検定 その2

独立性の検定の例:

- 2つの属性 (瞳の色と頭髪の色) を観察.
- 瞳の色:3種類×頭髪の色:2 種類=計6通りの組合せ.

3×2**分割表**:

瞳＼頭髪	金	ブルネット	計
青	27	13	40
緑	2	3	5
褐色	11	44	55
計	40	60	100

第14章VIII. 独立性の検定 その3

独立性の検定の例続き（期待度数の求め方）

「2つの属性が互いに独立」とは（教科書では定義が曖昧）：

瞳の色に関する事象［瞳の色がA_iである］と

頭髪の色に関する事象［頭髪の色がB_jである］が

常に独立であるということ

- すなわち，事象の独立性の定義より

  P（［瞳の色がA_iかつ頭髪の色がB_j］）

  ＝P（［瞳の色がA_i］）× P（［頭髪の色がB_j］）

  がすべてのA_i, B_j の組合せについて成り立っている。
- これをもとに期待度数を決定し，適合度検定の手法を適用．
- ［瞳の色がA_iである］［頭髪の色がB_jである］の確率は，分割表から得られる比率を推定値として用いる（他に情報がないので）．

第14章VIII．独立性の検定 その4

独立性の検定の例続き（期待度数の計算）

たとえば･･･

［青い瞳の確率］＝40/100，［ブルネットの確率］＝60/100

として，「青い瞳」と「ブルネットの頭髪」が独立なら

［青･ブルネットの確率］＝（40/100）×（60/100）＝0.24

と考える．

∴［青･ブルネットの期待度数］＝100×0.24＝24

瞳＼頭髪	金	ブルネット	計
青	27（16）	13（24）	40
緑	2（2）	3（3）	5
褐色	11（22）	44（33）	55
計	40	60	100

第14章VIII. 独立性の検定 その5

<u>一般には：</u>「A_iかつB_j」の期待度数をY_{ij}とすると

Y_{ij}＝N×P（A_iかつB_j）

　＝N×P（A_i）×P（B_j）　　・・・独立性より

　　N×（a_i / N）×（b_j / N）＝ $a_i b_j$ / N

（教科書p.125の記号を用いた）

A＼B	B_1	…	B_n	計
A_1	X_{11}	…	X_{1n}	a_1
…	…	…	…	…
A_m	X_{m1}	…	X_{mn}	a_m
計	b_1	…	b_n	N

第14章VIII. 独立性の検定 その5

独立性の検定の例続き (独立性の検定の手続き1)

- 帰無仮説H_0：2つの属性が互いに独立
  - すなわち独立性を仮定して求めた各期待度数が，すべて真の値と一致する．
- 対立仮説H_1：H_0の否定
  - すなわち独立性を仮定して求めた期待度数の中に，真の値と一致しないものがある．
- 対象となるχ^2分布の自由度は (2-1) × (3-1) ＝2
  - 属性ごとに総度数の拘束を受けるため．
  - 一般に，r行c列の分割表から計算される食い違い度の自由度は (r－1) × (c－1)．

第14章Ⅷ. 独立性の検定 その6

独立性の検定の例続き（独立性の検定の手続き2）

χ_0^2 ＝（27-16）^{2}/16 +（13-24）^{2}/24 +…+（44-33）^{2}/33 ＝21.711

を自由度2のχ^2分布の上側1%点（＝9.21）と比較．

→有意水準1%で棄却される（瞳と頭髪の色は独立ではなく，関連あり）．

瞳＼頭髪	金	ブルネット	計
青	27（16）	13（24）	40
緑	2（2）	3（3）	5
褐色	11（22）	44（33）	55
計	40	60	100

第14章Ⅷ. 独立性の検定 その6

独立性の検定に関する注意

一般に，分割表の小箱の度数が5未満のときは，隣と合併すべき（とされている）．

- 「χ^2分布への近似を悪くしないための配慮」
- 特に期待度数が小さいときは，食い違い度に与える影響が大きい．

→ほんとか？　→さきほどの例でやってみよう（青と緑を合併）

瞳＼頭髪	金	ブルネット	計
青または緑	27+2 (16+2)	13+3 (24+3)	40+5
褐色	11 (22)	44 (33)	55
計	40	60	100

第14章VIII. 独立性の検定 その6

$\chi_0^2 =$ (29-18)^2/18 + (16-27)^2/27 + (11-22)^2/22+ (44-33)^2/33 ＝18.2…

を自由度 (2-1) (2-1) =1の χ^2分布の上側1%点 (＝6.63) と比較.

→やっぱり棄却，すなわち独立でない.

★ただし一般には合併により検定結果が変わることはよくあるので注意が必要.

★分割表が元々2×2の場合→合併できないのでイエーツの補正 (今年度は割愛)

瞳＼頭髪	金	ブルネット	計
青または緑	27+2 (16+2)	13+3 (24+3)	40+5
褐色	11 (22)	44 (33)	55
計	40	60	100

[再確認] 第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定
- 母分散既知の場合と未知の場合
- KEYWORDS: t分布, 自由度, etc…

Ⅲ．母分散の検定　　←割愛
Ⅳ．平均値の差の検定
- KEYWORDS: t分布, 統合分散, etc…

Ⅴ．等分散の検定
- KEYWORDS: F分布, 自由度対, etc…

Ⅵ．比率の検定
- 推定との違いに注意！
- KEYWORDS: 正規近似, etc…

Ⅶ．適合度の検定
- KEYWORDS: χ^2 分布, 観測度数 (観測値) , 期待度数 (理論値) , etc…

Ⅷ．独立性の検定
- KEYWORDS: χ^2 分布, 分割表, etc…