統計II（医療統計II）
第5回　等分散検定と比率の検定

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定
Ⅲ．母分散の検定　　←割愛
Ⅳ．平均値の差の検定　←先週この途中まで
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定
Ⅶ．適合度の検定
Ⅷ．独立性の検定

では復習から

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

母平均μに関して

帰無仮説H_0：$\mu = \mu_0$

を検定する.

- **通常,** H_0 **が正しくないことを期待して行う.**
- **とりあえず正規母集団を仮定.**
- **以下, 標本サイズを**n**, 標本平均を**X' **, 有意水準をαとする**

<u>1-**母分散が既知のとき**</u>

母分散をσ²とする. X' **の標準化変数**$Z = (X' - \mu_0) / (\sigma / \sqrt{n})$ **が (正規母集団の仮定のもとでは厳密に) 標準正規分布** N(0,1) **に従うので, 両側検定の場合 (対立仮説**H_1：$\mu \neq \mu_0$)：

① $|Z| \geqq z(\alpha/2)$ **ならば** H_0**を棄却.**

② $|Z| < z(\alpha/2)$ **ならば** H_0**を棄却しない (採択).**

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

<u>1-**母分散が既知のとき (続き)**</u>

[注意 (教科書への補足)]

- **以上は**Z**を検定統計量と考えた場合. 標本平均**X' **を検定統計量として** X' **の棄却域を考えるなら**

$$P(-z(\alpha/2) \leqq Z \leqq z(\alpha/2)) = \gamma \ (= 1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P(\mu_0 - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \leqq X' \leqq \mu_0 + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}) = \gamma$$

となるから,

$$(\mu_0 - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ \mu_0 + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n})$$

がX' **の採択域で、この外が棄却域.**

- RECALL：**「μの**100(1-α)%**信頼区間」は**

$$(X' - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ X' + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n})$$

だった. すなわち両側検定の場合, 有意水準100α%**での**X' **の採択域は, μの**100(1-α)%**信頼区間を平行移動したものであり,**

「μ_0**がμの**100(1－α)%**信頼区間に入る」ことと**

「X' **の実現値が有意水準αでの採択域に入る」ことが同値.**

(つまり区間推定をやれば両側検定の結果もわかる)

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

1-母分散が既知のとき (さらに続き)

【注意 (教科書への補足) 2】

- 片側検定の場合
  - 対立仮説H_1：$\mu > \mu_0$ (右片側検定) のときは
    「①Z≧z (α) で棄却, ②Z＜z (α) で採択」
  - 対立仮説H_1：$\mu < \mu_0$ (左片側検定) のときは
    「①Z≦−z (α) で棄却, ②Z＞−z (α) で採択」
- 正規母集団の仮定がなくても，標本サイズがある程度大きければX' の分布は正規分布で近似でき，同様に検定できる (区間推定のときと同じ)

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

1-母分散が未知のとき

標本の不偏分散をU^2とする．統計量 (スチューデント比) T＝ (X'−μ_0) / (U/√n) が自由度n-1のt分布に従うので，両側検定の場合：

① |T|≧t_{n-1} (α/2) ならば H_0を棄却.

② |T|＜t_{n-1} (α/2) ならば H_0を棄却しない (採択) .

[復習] 第14章 II. 母平均の検定

1-母分散が未知のとき (続き)

[注意 (教科書への補足)] ・・・母分散既知の場合とほぼ同様

- 標本平均X' を検定統計量としてX' の棄却域を考えるなら

$$P\left(t_{n-1}(\alpha/2) \leqq T \leqq t_{n-1}(\alpha/2) \right) = \gamma \ (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P\left(\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \leqq X' \leqq \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \right) = \gamma$$

となるから,

$$\left(\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \right)$$

がX' の採択域で、この外が棄却域.

- 両側検定の場合, 「有意水準100α%でのX' の採択域がμの100 (1-α) %信頼区間を平行移動したもの」となるのも母分散既知の場合と同様.

- 片側検定なら (対立仮説H_1 が$\mu > \mu_0$または$\mu < \mu_0$)
  「①$T \geqq t_{n-1}(\alpha)$ で棄却, ②$T < t_{n-1}(\alpha)$ で採択」 (H_1 : $\mu > \mu_0$)
  または
  「①$T \leqq -t_{n-1}(\alpha)$ で棄却, ②$T > -t_{n-1}(\alpha)$ で採択」 (H_1 : $\mu < \mu_0$)
- t分布を用いるので正規母集団の仮定は必須.

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2つの正規母集団

$$N(\mu_1,\ \sigma_1^2)\ ,\ N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$$

に関して, これらの母集団の平均値が等しいかどうかを調べる. つまり

帰無仮説H_0: $\mu_1 = \mu_2$

を検定する.

1-母分散が既知のとき (あまり現実的ではないが・・・)

2つの正規母集団

$$N(\mu_1,\ \sigma_1^2)\ ,\ N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\},\ \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とする (σ_1^2, σ_2^2は既知) .

- 標本平均をそれぞれ X', Y' とすると

$$X' \sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2/n_1)\ ,\ Y' \sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2/n_2)$$

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

1-母分散が既知のとき (続き)

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$ より

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \ \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$$

- よって標準化変数:

$$Z = \{(X'-Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2\}}$$

が N (0,1) に従う.

- 分布さえ決まってしまえば, あとの手順はII. でやった検定と同様!
- [注意] 教科書には

両側検定の場合 (対立仮説H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$)

しか載っていないが, 事前に大小関係を予測できるなら

片側検定 (H_1 : $\mu_1 > \mu_2$ またはH_1 : $\mu_1 < \mu_2$)

も当然あり得る.

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

1-母分散が既知のとき (補足)

特に$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (すなわち等分散) のときは

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$ より

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \ \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2))$$

- よって標準化変数:

$$Z = \{(X'-Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

が N (0,1) に従う.

(次にやる「2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき」と比較せよ)

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

1-母分散が既知のとき（補足）

母分散既知で等分散の場合についてまとめると以下の通り：
（標本平均X’, Y’ の実現値をそれぞれ x’, y’ とする）

（1）[両側検定] H_0： $\mu_1 = \mu_2$ ，対立仮説H_1： $\mu_1 \neq \mu_2$
に対し，有意水準αで検定するとき，

$$z := \{(x'-y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1+1/n_2)\}}$$

とおくと，

$|z| \geqq z(\alpha/2)$ のときH_0が有意水準αで棄却される．

（2）[（右）片側検定] H_0：$\mu_1 = \mu_2$ ，対立仮説H_1：$\mu_1 > \mu_2$
に対し，有意水準αで検定するとき，

$z \geqq z(\alpha)$ のときH_0が有意水準αで棄却される．

[復習] 第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき

次の定理を用いる（教科書とは記述の方法が異なるので注意！）：

定理

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とし，これらの標本の平均，不偏分散をそれぞれX’, Y’ U_1^2, U_2^2 とする．

このとき，確率変数

$$T := \{(X'-Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 (1/n_1+1/n_2)\}}$$

は自由度n_1+n_2-2 のt分布に従う．

ただし，S_p^2はU_1^2, U_2^2の統合分散と呼ばれ，

$$S_p^2 := \{(n_1-1)U_1^2 + (n_2-1)U_2^2\} / (n_1+n_2-2)$$
$$= \{\Sigma (X_i - X')^2 + \Sigma (Y_i - Y')^2\} / (n_1+n_2-2)$$

[復習] 第14章 IV．平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

【注意1】

$$T = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

と，母分散（σ^2）既知の場合の

$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma^2 / (1/n_1 + 1/n_2))$

の標準化変数：

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

の類似に注意．

母分散σ^2が統合分散

$$S_p^2 = \{(n_1 - 1) U_1^2 + (n_2 - 1) U_2^2\} / (n_1 + n_2 - 2)$$

に置き換わっただけ．

[復習] 第14章 IV．平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

統合分散の意味するところ：

$$S_p^2 = \{(n_1 - 1) U_1^2 + (n_2 - 1) U_2^2\} / (n_1 + n_2 - 2)$$
$$= \{(n_1 - 1) U_1^2 + (n_2 - 1) U_2^2\} / \{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)\}$$

であるから，U_1^2, U_2^2の重み付き平均とみなすこともできる．

ここで

$E(S_p^2)$

$$= \{(n_1 - 1) E(U_1^2) + (n_2 - 1) E(U_2^2)\} / \{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)\})$$
$$= \{(n_1 - 1) \sigma^2 + (n_2 - 1) \sigma^2\} / \{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)\}$$
$$= \sigma^2$$

より，S_p^2はσ^2の不偏推定量になっている．

［復習］ 第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（まとめ）
標本平均X', Y' の実現値をそれぞれ x', y' とする．
自由度 $\nu = n_1 + n_2 - 2$ とおく．

（1）［両側検定］帰無仮説H_0： $\mu_1 = \mu_2$ ，対立仮説H_1： $\mu_1 \neq \mu_2$
に対し，有意水準 α で検定するとき，

$$t_0 := \{(x' - y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{s_p^2 \ (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

（すなわち定理のTの実現値）とおくと，
$|t_0| \geqq t_\nu(\alpha/2)$ のときH_0が有意水準 α で棄却される．

（2）［（右）片側検定］帰無仮説H_0：$\mu_1 = \mu_2$，対立仮説H_1：$\mu_1 > \mu_2$
に対し，有意水準 α で検定するとき，
$t_0 \geqq t_\nu(\alpha)$ のときH_0が有意水準 α で棄却される．

【注意】教科書（第1刷）p.120例題6ミスあり！
問題文に「不偏分散3.4」「不偏分散3.8」とあるが、解答を見ると（不偏でない）「分散」として扱っている．

S. TOKUNAGA 15

第14章 IV. 平均値の差の検定

【あらためて注意】

- 等分散の仮定は本質的．
- 分散が等しい場合について学習したが，そういうケースはたくさんあるのだろうか?
- 例題6でも「男女の分散が等しい」と仮定しているが，そういった仮定はそもそも妥当なのか?
- 分散がほぼ同じであると予想できるが確信が持てない場合というのも多々あるだろう．

→だったら「2つの母集団の分散が等しい」という仮説を検定すればよい！

→（「3-母分散は未知で異なるとき」を飛ばして）

「V. 等分散の検定」へ．

S. TOKUNAGA 16

第14章 V．等分散の検定（その1）

以下の定理を用いる：

<u>定理（教科書p.100）</u>

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2),\ N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に大きさn_1, n_2の標本を無作為抽出し，その標本分散（不偏分散）をそれぞれU_1^2, U_2^2とする．

そのとき$F := U_1^2 / U_2^2$は，

自由度対（$n_1 - 1, n_2 - 1$）のF分布（と呼ばれる分布）に従う．

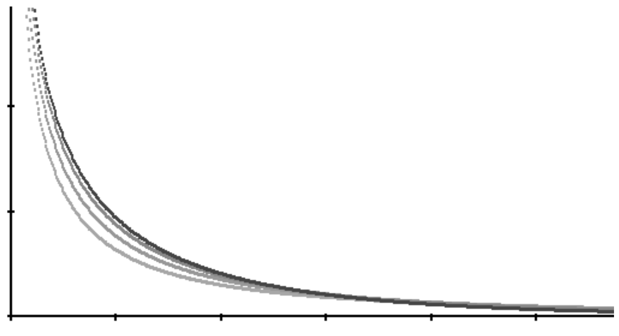
★教科書（第1刷）にミスプリ（脱字）あり．

第14章 V．等分散の検定（その2）

（グラフは明星大学船津好明先生のWebsiteより転載しています）

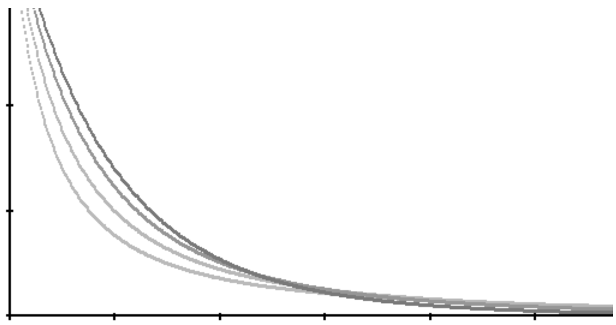
<u>F分布の密度関数（1）</u>

自由度対（1, 1）（1, 2）（1, 5）（1, 20）



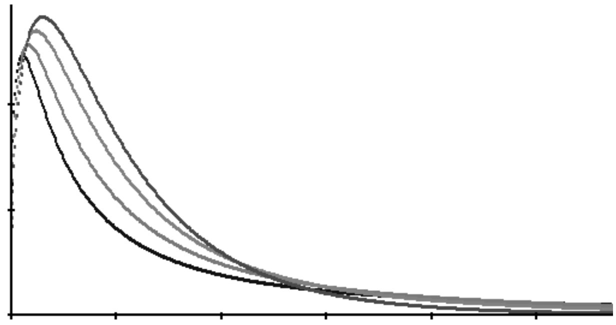
第14章Ⅴ．等分散の検定（その3）

F分布の密度関数（2）
自由度対（2, 1）（2, 2）（2, 5）（2, 20）



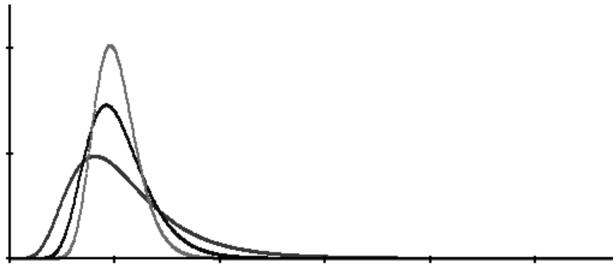
第14章Ⅴ．等分散の検定（その4）

F分布の密度関数（3）
自由度対（3, 1）（3, 2）（3, 5）（3, 20）



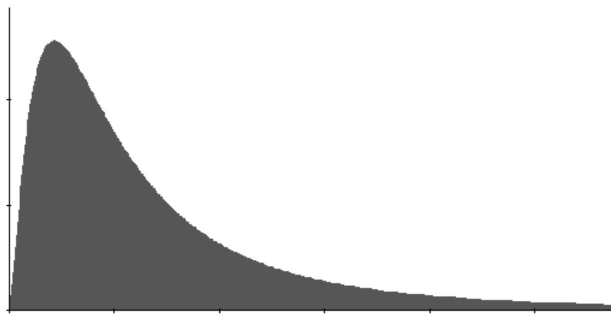
第14章V．等分散の検定（その5）

F分布の密度関数（4）
自由度対（20,20）（50, 50）（100, 100）



第14章V．等分散の検定（その6）

F分布の密度関数（5）
自由度対（5, 5）



第14章Ⅴ．等分散の検定（その7）

<u>**等分散の検定**</u>

- **定理を利用して**

  帰無仮説H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, **対立仮説**H_1：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

  として有意水準α**で両側検定.**

- F**分布の密度関数は非対称だが,** $F=U_1^2/ U_2^2$**の分母・分子は入れ替え可能なので右側（上側）だけわかればよい.**
  - U_1^2, U_2^2 **の実測値のうち大きい方を分子にして比を取る（すなわち［比の値］＞1となるようにする）.**

- **教科書巻末の付表**5・6**を利用して**

  自由度対$(n_1-1, n_2-1) = (k, l)$ **の**F**分布の上側**100(α/2)%**点** $F_l^k(\alpha/2)$ **を求める.**

教科書p.122,123訂正

<u>p.122 **下から**3**行目**</u>

「F＞1**としているので**~~**片側検定でよい**~~」

のではなくて，正しくは

「F＞1**としているので片側（右側）だけチェックすればよい**」

です．あくまで両側検定！

<u>［**例題**8］**解答**</u>

誤「これが自由度（7,4）**の**F**分布に従う**」

正「これが自由度対（4,7）**の**F**分布に従う**」

さらに！

問題文に「有意水準5%**で検定せよ」とあるから**

$$f_7^4(0.05/2) = f_7^4(0.025) = 5.52$$

を使うべき！

第14章Ⅴ．等分散の検定（その8）

例題6の場合

	人数	平均値	不偏分散
男	20	74	3.4
女	17	65	3.8

F_0＝3.8 / 3.4 ＝ 1.12

有意水準α＝0.05で等分散の検定を行なうと：

F_{19}^{16}（0.05/2） ＞ F_{19}^{20}（0.025） ＝2.51＞1.12

よりH$_0$：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$は棄却できない．

よって一応両母分散は等しいと見なすことができ，「分散が未知だが等しいことは既知」の場合の平均値の差の検定を行うことができる．

等分散の検定に関する補足

- 通常の検定問題と違い，帰無仮説（＝「等分散仮説」）H_0は棄却されないことを期待している．
- 棄却されなかったからといってH_0の正しさが保証されるわけではない！あくまで「否定できなかった」だけ．
- H_0が棄却される場合は，他の方法を用いなければならない．

→Ⅳ．「3-母分散が未知で異なるとき」

（今年度は割愛します）

14章IV. 平均値の差の検定に関する補足（その1）

- 教科書では，いずれも独立な（対応のない）2標本に関する問題を扱った．
  - 「対応のある2標本」⇔「独立な2標本」
- 現実には「対応がある2標本」として扱うべきケースも多い（「対応」を無視するのは合理的ではない）
  - 何組かの一卵性双生児の対を用いてデータを取る．
  - 各人のスタート前とゴール直後の体重の差をデータにする．
  - etc.
- 2標本ではあるが，対データの差をデータとして解析を行うので，実質的には1標本問題．
  - 「独立な2標本」の場合よりずっと単純！

14章IV. 平均値の差の検定に関する補足（その2）

- 母分散未知のケースを考える．
  →t分布の利用（正規母集団の仮定が必要）．
- n個の対をなす標本データ (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n) から
  $$d_1= x_1-y_1,\ d_2= x_2-y_2,\ \ldots,\ d_n= x_n-y_n$$
  を算定．
- 2つの母平均をそれぞれ μ_1，μ_2 とし，
  $d' = \Sigma d_i/n$，$s^2 = \Sigma (d_i-d')^2/(n-1)$ とおくと
  $$T := (d'-(\mu_1-\mu_2))/(s/\sqrt{n})$$
  が自由度n-1のt分布に従う．
- 以下はこれまでと同じ要領．

14章IV. 平均値の差の検定に関する補足（その3）

「対応のある2標本」に関する推定・検定（まとめ）

(1) [区間推定] 母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の信頼係数 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\left(d' - t_{n-1}(\alpha/2)\ s/\sqrt{n}\ ,\ d' + t_{n-1}(\alpha/2)\ s/\sqrt{n} \right)$$

(2) [両側検定]

帰無仮説H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$，対立仮説H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ に対し，有意水準 α で検定する場合，

$$t_0 := d' / (s/\sqrt{n})$$

とおくと，$|t_0| \geqq t_{n-1}(\alpha/2)$ のときH_0が有意水準 α で棄却される．

(3) [（右）片側検定]

帰無仮説H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$，対立仮説H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$ に対し，有意水準 α で検定する場合，$t_0 \geqq t_{n-1}(\alpha)$ のときH_0 が有意水準 α で棄却される．

VI. 比率の検定（1）

2項分布の正規近似RECALL

中心極限定理により，nが十分大きいとき，

B(n,p) は N(np, np(1-p)) で近似できる．

∵ B(n,p) に従う確率変数は，B(1,p)（という同一の分布）に従う独立なn個の確率変数の和と見なせるから．

- 従って，標本比率P＝X/nの分布も，
  正規分布 N(p, p(1-p)/n)　で近似できる．
- さらにPの標準化変数：

$$Z = (P-p) / \sqrt{p(1-p)/n}$$

は近似的に標準正規分布に従う．

- 分布が決まれば，推定・検定の考え方は他のケースと同じ．

ただし・・・

VI. 比率の検定（2）

【注意】母比率の推測における推定と検定の違い

以下母比率をp，標本比率P＝X/n の実現値をP_0とする．

- **推定**を行う際は，
  Z=（P－p）/√（p（1－p）/n）の分母（Pの標準偏差）のpを近似値（推定値） P_0で置き換えて計算．すなわち信頼度γ＝1－αの信頼区間は以下のようになった：
  （P_0－z（α/2）√（P_0（1- P_0）/n），P_0＋z（α/2）√（P_0（1- P_0）/n））
  - ただし，誤差の最大値を見積もりたいときはp=0.5 を採用．

これに対し

- **検定**の際は母比率pの値が帰無仮説で（もちろん厳密な値として）与えられるので，近似の必要がなく，上のような置き換えはまったく無意味！
  - Z=（P－p）/√（p（1－p）/n） に標本比率Pおよび帰無仮説で与えたpの値をそのまま代入して実現値を計算し，棄却／採択を判定すればよい．
  - 検定に対する理解の根本に関わる部分なので，**ここを間違える人は進級させません**　　. . . がしかし

教科書p.124訂正

［例題9］

Zの分母に標本比率93/103＝0.91を代入しているのは誤り！

帰無仮説H_0：p＝0.75

と考えられるから，正しくは

Z＝（0.91-0.75） / √（（0.75×0.25）/103）

＝3.75

（＞1.64だから棄却されるのは同じ）

(再) 平成14年度試験問題より

2002年10月1日付けの朝日新聞記事によれば、最近5年間の日本棋院のプロ公式戦15000局において、黒盤勝率は51.86%であった。

(2) 日本棋院は現行ルールでは先手が有利であるとしてルールの改正方針を決定した。この判断についてどう思うか。仮説検定の考えを用いて考察せよ。

★適当な有意水準 (たとえば $\alpha = 0.05$) を設定して検定問題を解いてみましょう.

現行ルール (当時) において先手の勝つ確率をpとすると:

帰無仮説: H_0 : $p = 0.5$ (現行ルールは公平)

対立仮説: H_1 : $p \neq 0.5$ (現行ルールは不公平)

(とりあえず両側検定とした→理由を考えよ)