統計II（MI）
第4回　F分布・母比率に関する推測

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

[再確認] 統計IIの内容

以下の順序でやってます:

- 6.1 母分散が未知の場合の母平均の推測 (t分布)
- 6.4 対応のある2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (t分布)
- 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測

(前回ここまで)

- 6.3 等分散の検定 (F分布)
- 6.5 母集団比率に関する推測 (正規近似)

(今回ここまで)

- 6.6 適合度検定 (χ^2検定)

今日の授業の概要：

- 前回の復習（独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測）
- 6.3 等分散の検定（F分布）

では復習から

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (1)

- 「2つの母集団分布の平均について, 差があるか否か, 差があるとすればどの位の差なのか, を考える」
- 「独立な2標本」⇔「対応のある2標本 (6.4) 」
  - 大雑把に言って, データが対になっていなければ独立 (別々の母集団から得た標本など) .
- 一見ゴツい式が出てきますが、やってることは見かけほど複雑ではありません.
- とりあえず正規母集団は仮定しておく.

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (2)

まず母分散が既知の場合を考えてみる

(あまり現実的ではないが原理をよく理解するため)

2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2),\ N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\},\ \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とする(σ_1^2, σ_2^2は既知).

- 標本平均をそれぞれ X', Y' とすると

$$X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1),\ Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$$

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (3)

母分散が既知の場合 (続き)

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$ より

  $X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$

- よって標準化変数:

  $Z = \{(X'-Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2\}}$

  が $N(0,1)$ に従う.

［復習］ 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測（4）

母分散が既知の場合（続き）

特に $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$（すなわち等分散）のときは

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma^2 / n_1)$，$Y' \sim N(\mu_2, \sigma^2 / n_2)$

  より

  $$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2))$$

- **よって標準化変数：**

  $$Z = \{(X'-Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

  が $N(0,1)$ **に従う．**

- **分布さえ決まってしまえば，あとの手順はこれまでと同様！**

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (5)

以上より，母分散既知で等分散の場合の推定・検定は以下の通り：

(標本平均X', Y' の実現値をそれぞれ x', y' とする)

(1) **[区間推定]** 2つの母集団の母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の，
信頼度 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間：

$$\left(x' - y' - z(\alpha/2)\sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}},\ x' - y' + z(\alpha/2)\sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}} \right)$$

(2) **[両側検定]** 帰無仮説 H_0： $\mu_1 - \mu_2 = 0$，対立仮説 H_1： $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
に対し，有意水準 α で検定するとき，

$$z := \{(x' - y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

とおくと，

$|z| \geqq z(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される．

(3) **[片側検定]** 帰無仮説 H_0： $\mu_1 - \mu_2 = 0$，対立仮説 H_1： $\mu_1 - \mu_2 > 0$
に対し，有意水準 α で検定するとき，

$z \geqq z(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される．

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (6)

母分散が未知だが等しい場合

次の定理を用いる:

定理6.2

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とし, これらにもとづく標本平均, 標本分散 (不偏分散) をそれぞれ X', Y' S_1^2, S_2^2 とする.

このとき, 確率変数

$$T := \{(X'-Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 (1/n_1+1/n_2)\}}$$

は自由度n_1+n_2-2 のt分布に従う.

ただし, S_p^2はS_1^2, S_2^2の**統合分散**と呼ばれ,

$$S_p^2 := \{\Sigma (X_i - X')^2 + \Sigma (Y_i - Y')^2\} / (n_1+n_2-2)$$

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (7)

【注意】

$$T = \{(\bar{X}' - \bar{Y}') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

と，母分散 (σ^2) 既知の場合の

$\bar{X}' - \bar{Y}' \sim N(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma^2 / (1/n_1 + 1/n_2))$

の標準化変数：

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

の類似に注意.

σ^2が統合分散

$$S_p^2 = \{\Sigma (X_i - X')^2 + \Sigma (Y_i - Y')^2\} / (n_1 + n_2 - 2)$$

に置き換わっただけ.

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (8)

統合分散の意味するところ：

$$S_p^{\,2} = \{\Sigma(X_i - X')^2 + \Sigma(Y_i - Y')^2\} / (n_1 + n_2 - 2)$$

$$= \{(n_1-1)S_1^{\,2} + (n_2-1)S_2^{\,2}\} / \{(n_1-1) + (n_2-1)\}$$

であるから，$S_1^{\,2}, S_2^{\,2}$の重み付き平均とみなすこともできる．

ここで

$E(S_p^{\,2})$

$= \{(n_1-1)E(S_1^{\,2}) + (n_2-1)E(S_2^{\,2})\} / \{(n_1-1) + (n_2-1)\})$

$= \{(n_1-1)\sigma^2 + (n_2-1)\sigma^2\} / \{(n_1-1) + (n_2-1)\}$

$= \sigma^2$

より，$S_p^{\,2}$はσ^2の不偏推定量になっている．

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (8)

自由度 $\nu = n_1 + n_2 - 2$ とおく.

(1) [区間推定] 2つの母集団の母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の,
信頼度 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間:

$$\left(x' - y' - t_\nu(\alpha/2) \sqrt{\{ s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2) \}},\ x' - y' + t_\nu(\alpha/2) \sqrt{\{ s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2) \}} \right)$$

(2) [両側検定] 帰無仮説 H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$$t_0 := \{ (x' - y') - (\mu_1 - \mu_2) \} / \sqrt{\{ s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2) \}}$$

(すなわち定理6.2のTの実現値) とおくと,
$| t_0 | \geqq t_\nu(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(3) [片側検定] 帰無仮説 H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,
$t_0 \geqq t_\nu(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

[復習] 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (9)

【あらためて注意】

- 等分散の仮定は本質的.
- 分散が等しい場合について学習したが, そういうケースはたくさんあるのだろうか?
- 例題6.2で, 「男女の分散が等しい」と仮定したのはそもそも妥当なのか? (標本分散の値にはかなり差があるけど許容範囲なのか?)
- 分散がほぼ同じに見えるが確信が持てない場合というのも多々あるだろう.

→だったら「2つの母集団の分散が等しい」という仮説を検定すればよい!

→「6.3 等分散の検定 (F分布)」へ.

6.3 等分散の検定（F分布）（その1）

以下の定理を用いる：

<u>**定理6.3**</u>

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に大きさn_1, n_2の標本を無作為抽出し，その標本分散（不偏分散）をそれぞれS_1^2, S_2^2とする．

そのとき$F := S_1^2 / S_2^2$は，

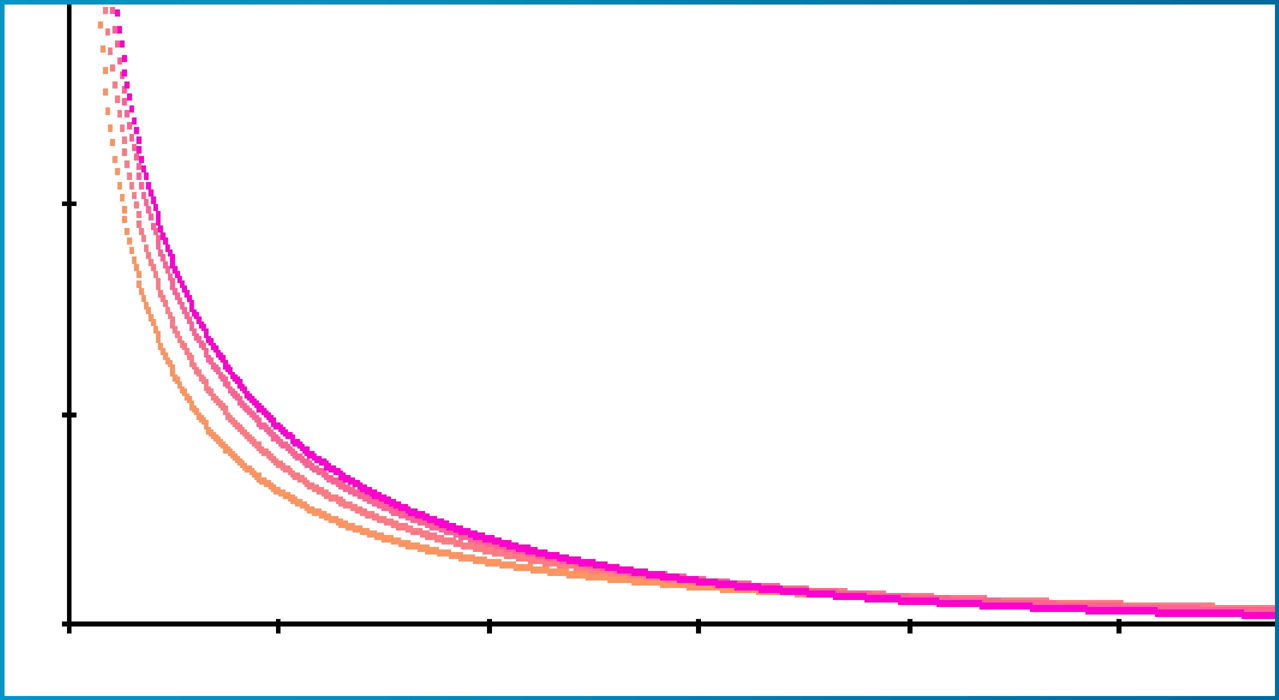
自由度対（$n_1 - 1, n_2 - 1$）の**F分布**（と呼ばれる分布）に従う．

6.3 等分散の検定（F分布）（その2）

（グラフは明星大学船津好明先生のWebsiteより転載しています）

F分布の密度関数（1）

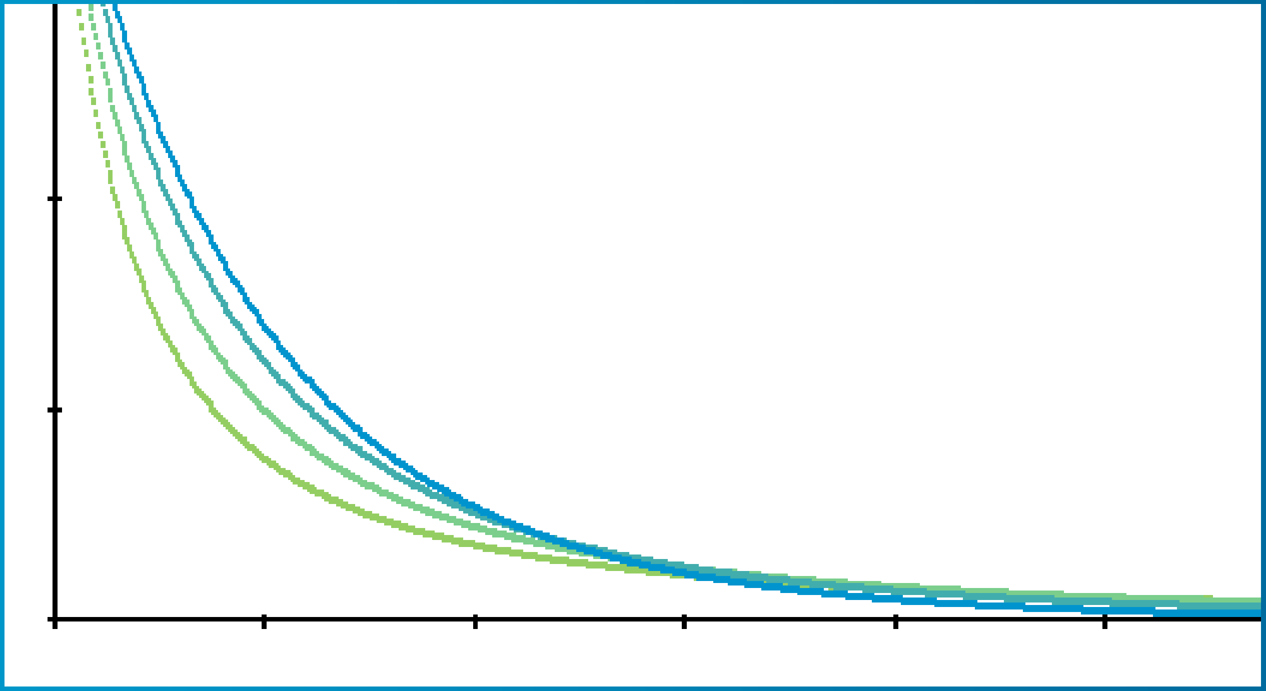
自由度対（1, 1）（1, 2）（1, 5）（1, 20）



6.3 等分散の検定（F分布）（その3）

F分布の密度関数（2）

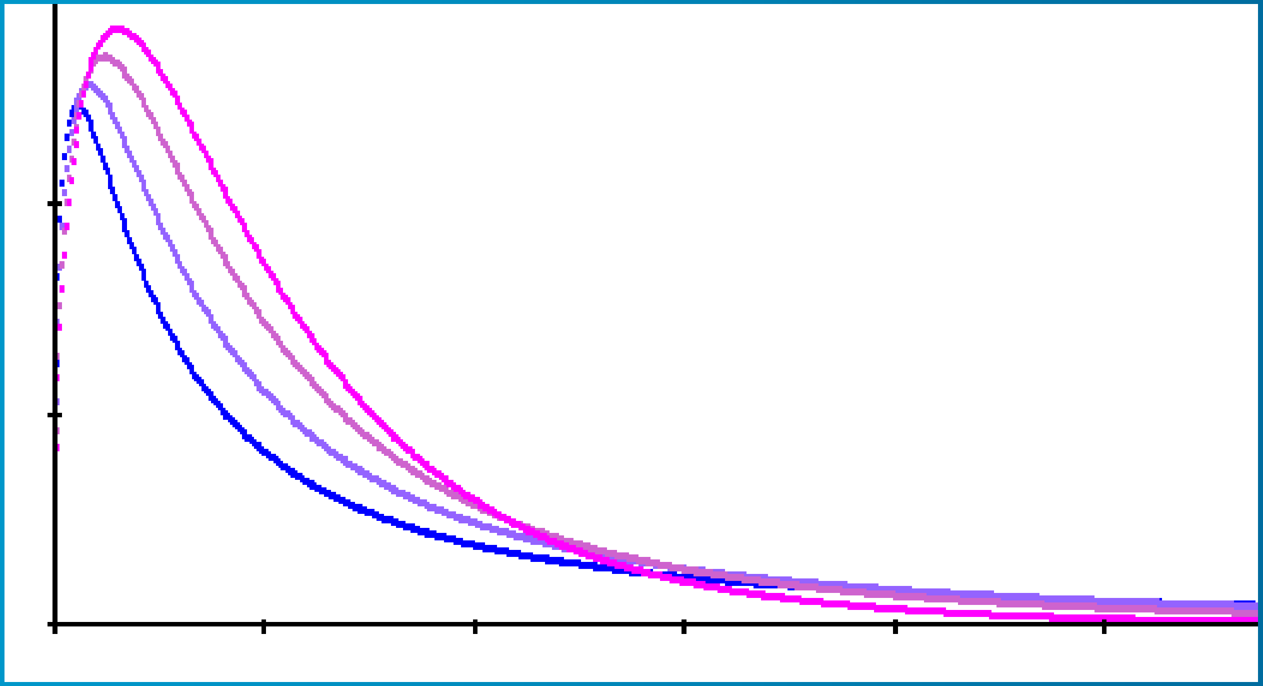
自由度対 （2, 1）（2, 2）（2, 5）（2, 20）



6.3 等分散の検定（F分布）（その4）

F分布の密度関数（3）

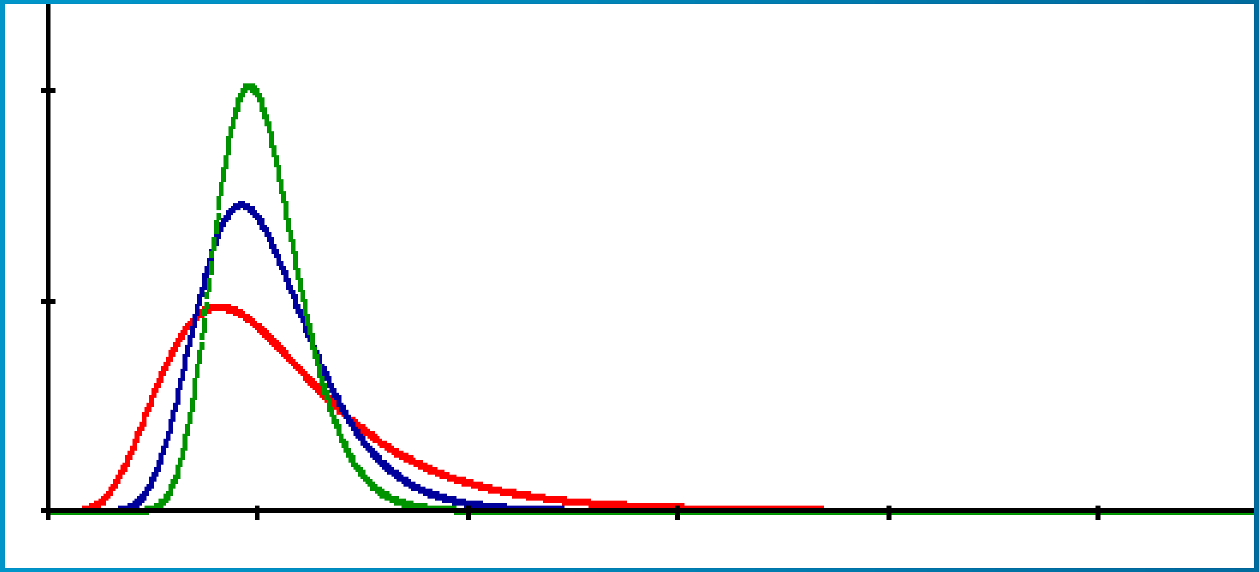
自由度対（3, 1）（3, 2）（3, 5）（3, 20）



6.3 等分散の検定（F分布）（その5）

F分布の密度関数（4）

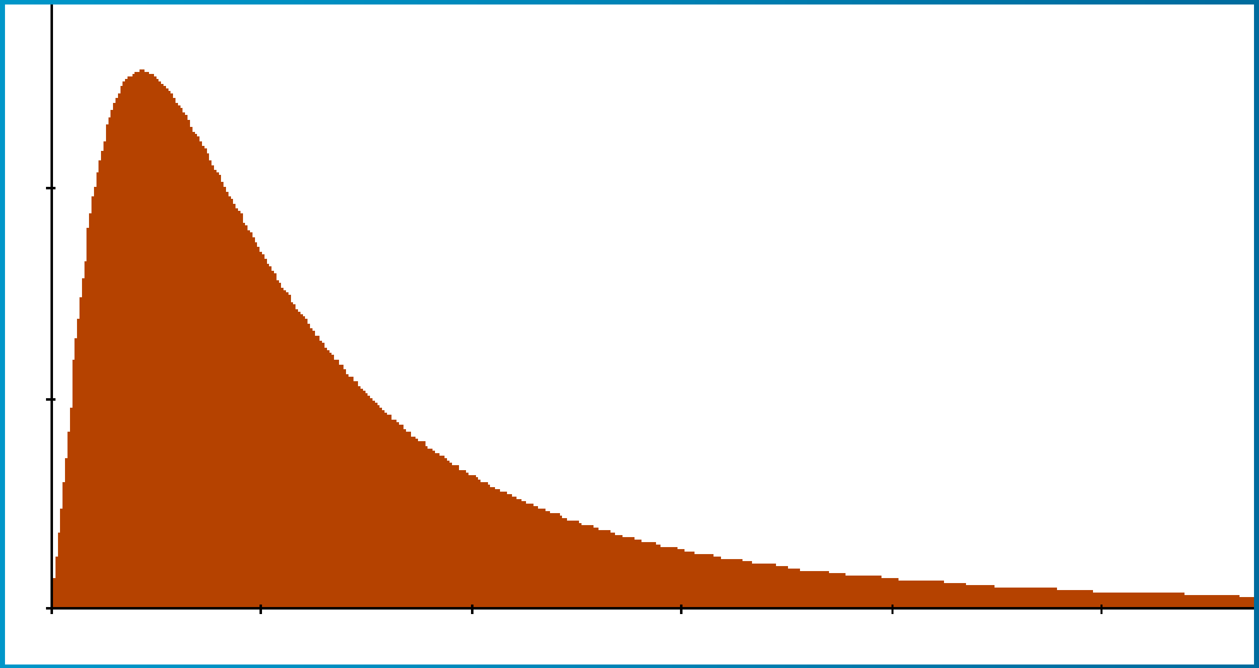
自由度対（20,20）（50, 50）（100, 100）



6.3 等分散の検定（F分布）（その6）

F分布の密度関数（5）

自由度対（5, 5）



6.3 等分散の検定（F分布）（その7）

等分散の検定

- 定理6.3を利用して
  帰無仮説H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 対立仮説H_1：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
  として有意水準αで検定.
- F分布の密度関数は非対称だが, $F = S_1^2 / S_2^2$の分母・分子は入れ替え可能なので右側（上側）だけわかればよい.
  - S_1^2, S_2^2 の実測値のうち大きい方を分子にして比を取る.
- 教科書巻末の付表Eを利用して
  自由度対（$n_1 - 1, n_2 - 1$）のF分布の上側（α/2）点を求める．

6.3 等分散の検定（F分布）（その8）

例題6.2の場合

	人数	平均値	不偏分散
男	32	15.6	1.61
女	30	13.2	3.26

F_0＝3.26 / 1.61 ＝ 2.02 とする．
有意水準α＝0.05で等分散の検定を行なう：
$F_{31}^{29}(0.05/2)$　　$F_{30}^{30}(0.05/2)$ ＝2.07＞2.02
よりH_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$は棄却できない．
よって一応両母分散は等しいと見なすことができる．

等分散の検定に関する補足

- 通常の検定問題と違い，帰無仮説（ここでは「等分散仮説」）H_0は棄却されて欲しくない．
- 棄却されなかったからといってH_0の正しさが保証されたわけではないので，教科書でも「一応・・・とみなすことができる」という表現にとどめている．
- H_0が棄却される場合は，他の方法を用いなければならない（この授業では扱わない）．

[再確認] 統計 II の内容

以下の順序でやってます:

- 6.1 母分散が未知の場合の母平均の推測 (t分布)
- 6.4 対応のある2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (t分布)
- 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測
- 6.3 等分散の検定 (F分布)

(ここまで終わった)

- 6.5 母集団比率に関する推測 (正規近似)

(今回ここまで)

- 6.6 適合度検定 (χ^2検定)

6.5 母集団比率に関する推測 (1)

「母集団比率に関する推測」とは

- ベルヌーイ母集団に関する推測.
  - 2項分布の応用.
  - ある程度大きな標本を扱うケースがほとんどなので, たいていは「2項分布の正規近似」を利用する.

- 「世論調査の類」. 支持率調査など, 身近に興味深い例が多い.
  - 「統計的な理解を深めるよいチャンス」.

6.5 母集団比率に関する推測（2）

2項分布の正規近似RECALL

中心極限定理により，nが十分大きいとき，

B（n,p）はN（np, np（1-p））で近似できる．

∵ B（n,p）に従う確率変数は，B（1,p）（という**同一の分布**）に従う**独立な**n個の確率変数の**和**と見なせるから．

- 従って，標本比率P＝X/nの分布も，

  正規分布 N（p, p（1-p）/n） で近似できる．
- さらにPの標準化変数：

$$Z = (P-p) / \sqrt{p(1-p)/n}$$

  は近似的に標準正規分布に従う．
- 分布が決まれば，あとはこれまでと同じ考え方で進めればよい．

6.5 母集団比率に関する推測（3）

【注意】母比率の推測における推定と検定の違い

母比率をp，標本比率$P=X/n$ の実現値をP_0とする．

- **推定**を行う際は，
  $Z=(P-p)/\sqrt{p(1-p)/n}$ の分母（Pの標準偏差）のpを近似値（推定値）P_0で置き換えて計算．すなわち信頼度$\gamma=1-\alpha$の信頼区間は以下のようになる：

$$\left(P_0-z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n},\ P_0+z(\alpha/2)\sqrt{P_0(1-P_0)/n}\right)$$

- ただし，誤差の最大値を見積もりたいとき（例：例題6.4の（4））は $p=0.5$ を採用．
  - $p(1-p)$ は$p=0.5$のとき最大値0.25を取ることに注意（2次関数のグラフを思い出せ！）．

- **検定**の際は母比率pの値が帰無仮説で（もちろん厳密な値として）与えられるので，近似の必要がなく，上のような置き換えはまったく無意味．
  - ここを間違える人は進級させません

2項分布の正規近似に関する補足 [半整数補正]

- nが大きければかなり良い近似であると思われるが, nが小さいときはどのくらい誤差が出るのだろうか？
  - たとえば5章例題5.2のケースでB (10,0.5) をN (5,2.5) で近似してそのまま計算すると･･･ (やってみましょう)
- nが小さいときに少しでも誤差を減らす方法はないか？
- X～B (n,p) とする. 整数a,bに対しP (a≦X≦b) を正規近似で求める際, P (a-0.5≦X≦b+0.5) と補正してから計算した方が誤差が減る. この補正を「不連続補正」ないし「半整数補正」といい, 特にnが小さいときに効果的.

  →図で確認しよう.

「半整数補正」続き

- 標本サイズn（ないしnp）が小さいとき特に有効．大標本の場合はあまり差がでない．
- 「メディカル・コメディカルの統計学」にはなぜか載っていませんが知っておくべきでしょう．

以下おまけ：

From TV News

The Governor of Tokyo said…

“I don’t believe the opinion poll, because they surveyed only 1000 people or so.”

（世論調査の結果について記者から感想を尋ねられたのを受けて）

Is 1000 too small?

1000 is :

1000/127,500,000 = 1/127,000 = 0.0008% of the total population of Japan,

1000/12,140,000 = 1/1214 = 0.08% of the total population of Tokyo.

（確かに母集団と比較すれば小さいが･･･）

But!

Calculation of SE

- n: sample size
- p: population rate
- SE: Standard Error

SE = $\sqrt{(p(1-p)/n)}$

=< $\sqrt{(0.5(1-0.5)/1000)}$ = 0.0158

If p is around 0.1, then

SE = $\sqrt{(0.1(1-0.9)/1000)}$ = 0.00949 1%

Estimation of error（誤差の評価）

SE = $\sqrt{(p(1-p)/n)}$ depends only on p and n,
i.e., it does not depend on the size of population!
（母集団の大きさは誤差に影響しない！）

- In this case, the value of the error is around 2-3%.
（計算してみましょう）
- If n=1000×4=4000, the error is reduced by half.
- In many case, the estimation by a sample with n=1000 is reliable.
（←無作為抽出がうまくいっていれば）
- On the other hand, we assume random sampling in the above estimation, which can be suspected.

平成14年度試験問題より

2002年10月1日付けの朝日新聞記事によれば，最近5年間の日本棋院のプロ公式戦15000局において，黒盤勝率は51.86%であった。

(2) 日本棋院は現行ルールでは先手が有利であるとしてルールの改正方針を決定した。この判断についてどう思うか。仮説検定の考えを用いて考察せよ。

【参考】朝日新聞の解説（ちなみに東京版夕刊の1面）：

「厳しい勝負の世界ではわずか2%の違いも無視できない」

↑「そりゃ違うだろ！」と突っ込むところ．

- 標本サイズが大きいからわずかな差でも有意となるのであって，「勝負の厳しさ」とは無関係．

★適当な有意水準を設定して検定問題を解いてみましょう．
（帰無仮説: [先手の勝つ確率] ＝0.5）