統計II（医療統計II）
第4回　母平均の検定

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

あらためて第14章 検定　の内容

Ⅰ．検定
Ⅱ．母平均の検定
Ⅲ．母分散の検定
Ⅳ．平均値の差の検定
Ⅴ．等分散の検定
Ⅵ．比率の検定
Ⅶ．適合度の検定
Ⅷ．独立性の検定

★III．は割愛します．
では復習から

［再確認］ 教科書p.111訂正

［例題5］
誤「回答者330人のうち，18人が」
正「回答者330人のうち，23人が」
（よって標本比率p’＝ 23/330　　0.07となり，
解答はそのまま）

では14章 へ．

［復習］ 推定から検定へ

- もう数学的に重要な部分の大半は出尽くした．区間推定がわかっていれば検定も簡単！（なはず）
- 基本的なアイディアを正しく理解することが重要．
  - 計算だけなら中学生でもできるしパソコンがやってくれる
- 推定と検定を混同しないこと！
  - 単なる手法の違いというよりは，発想が根本的に異なる．

[復習] 第14章 Ⅰ. 検定

仮説検定とは

- (帰無) 仮説：
  「事前の情報や経験から抱いている既存のイメージ」
- その (帰無) 仮説を疑いたくなるような状況が生じたとする.
  - その「疑い」に基づく (帰無仮説を否定する) 仮説を対立仮説という.
    (ただし単に「仮説」という場合は帰無仮説の方を指します)
- まず (帰無) 仮説が正しいとして (本当は疑いつつ)，標本データを見ずに推論を行う. 一種の**背理法的思考**.
- 標本データから得た情報と (帰無) 仮説に基づく推論の結果を照らし合わせ，仮説の真偽を判断する (仮説を棄却または採択する).

[復習] 第14章 Ⅰ. 検定

1-検定の原理

- 例1：「甲状腺疾患患者の10人の血清アルブミンを測定したら健常人の60%しかなかったが，この疾患では血清アルブミンが低値になると断定してよいだろうか」
  - 「減ることはない」と仮説 (帰無仮説) を立て，この仮説が否定できるかどうかを調べる.
  - 標本の実現値と理論値 (期待値) は一致しないのが普通だが，その差異が誤差の範囲内なのか，意味のある差異なのか，が問題.
  - 確率の理論から言って誤差の範囲内とは考えられない差異があると判断できるとき，仮説は否定され，「有意である」「有意差がある」という.

- 例2：「サイコロを60回投げたら1の目が25回も出た. 理論的には (すなわち期待値としては) 1の目は10回 (程度) 出るはずである. この差異は大きすぎないだろうか」
  →「サイコロは正常」という (帰無) 仮説を立て，「25回」が誤差の範囲内かどうかを調べる.

[復習] 第14章 Ⅰ. 検定

2-帰無仮説，対立仮説と2種類の過誤

- 最初に設定した仮説：帰無仮説．通常H_0で表す．
- 帰無仮説を否定したとき受け入れる仮説：
  対立仮説．通常H_1で表す．
- 帰無仮説H_0を否定することを，H_0を棄却するという．
- H_0が棄却されないとき，H_0を採択するという．
- さきほどの例1だと
  - H_0：「甲状腺疾患にかかっても血清アルブミンに変化はない」
  - H_1：「変化する」（もしくは「増える」，「減る」）
    - 医学的見地から増えることはあり得ない（らしい）ので，H_1は「減る」としてもよい（→後述の「片側検定」の例）．

[復習] 第14章 Ⅰ. 検定

2-帰無仮説，対立仮説と2種類の過誤（続き）

- 第1種の過誤：本当はH_0が正しいのにH_0を棄却してH_1を採択してしまう．
  - 第1種の過誤を犯す確率を危険率あるいは有意水準といい，通常αで表す．
  - 習慣的に，$\alpha = 0.05, 0.01$とすることが多い．
- 第2種の過誤：本当はH_0が間違っているのにH_0を採択してしまう．
  - 第2種の過誤を犯す確率を通常βで表し，$1-\beta$を検出力という．

[復習] 第14章 Ⅰ. 検定

注意と補足

- (あたりまえだが) 仮説検定による判断は実際の真偽と一致するとは限らない. あくまで客観的・合理的な判断をするための1つの手法.
- 必然的に確率の評価を含んだ判断となる.
  - 判断の基準となる確率が有意水準
- 典型的な例・・・新薬や新しい治療法のテスト
  - まず「効果がない」という帰無仮説を立てて推論

  →臨床試験のデータを分析した結果, 帰無仮説を否定できれば, 「効果がある」と判断できる.

S. TOKUNAGA 9

[復習] 第14章 Ⅰ. 検定

3-**片側検定と両側検定**

棄却域: 検定に用いる統計量 (検定統計量) において, 棄却することが決定される範囲. 棄却域の補集合が採択域.

母数θに対し, 帰無仮説をH_0 : $\theta = \theta_0$とするとき, 対立仮説H_1の立て方により以下のように分類:

- 両側検定: H_1はH_0の単純な否定, すなわち

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- 片側検定: H_1は大小関係を考慮したH_0の否定, すなわち

$$H_1 : \theta > \theta_0 \quad \text{または} \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

  - 異なっているとすれば確実に大きい, あるいは小さいことが予測されるときにはこちら.
  - 棄却域の違いに注意.
  - 「両側か片側か」の判断には決まったルールがあるわけではない. 両側検定と片側検定の結果が異なる場合もあるので注意が必要.

S. TOKUNAGA 10

[復習] 第14章 Ⅰ. 検定

4-検定の手順

① 帰無仮説H_0，対立仮説H_1，有意水準αを定める.
② 標本から統計量（検定統計量）を求める.
③ 検定統計量（の実現値）が棄却域に入るかどうか調べる.
④ 棄却域に入ればH_0を棄却してH_1を採択，入らなければH_0を採択.

【注意】H_0が棄却できなかったとき便宜上「H_0を採択」というが，「H_0を仮定しても矛盾しない」というだけであるから，「H_0の正しさ」を積極的に主張するものではない！
（H_0が間違っていても，検定統計量が”たまたま”採択枠に入ることは十分あり得る）

第14章 Ⅱ. 母平均の検定

母平均μに関して

帰無仮説H_0：$\mu = \mu_0$

を検定する.

- 通常，H_0が正しくないことを期待して行う.
- とりあえず正規母集団を仮定.
- 以下，標本サイズをn，標本平均をX'，有意水準をαとする

1-母分散が既知のとき

母分散をσ^2とする．X'の標準化変数$Z = (X' - \mu_0) / (\sigma / \sqrt{n})$が（正規母集団の仮定のもとでは厳密に）標準正規分布$N(0,1)$に従うので，両側検定の場合（対立仮説H_1：$\mu \neq \mu_0$）：

① $|Z| \geqq z(\alpha/2)$ならばH_0を棄却.
② $|Z| < z(\alpha/2)$ならばH_0を棄却しない（採択）.

第14章 II. 母平均の検定

1-母分散が既知のとき（続き）

【注意（教科書への補足）】

- 以上はZを検定統計量と考えた場合．標本平均X’を検定統計量として X’の棄却域を考えるなら

$$P(-z(\alpha/2) \leqq Z \leqq z(\alpha/2)) = \gamma \ (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P(\mu_0 - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \leqq X' \leqq \mu_0 + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}) = \gamma$$

となるから，

$$(\mu_0 - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ \mu_0 + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n})$$

がX’の採択域で、この外が棄却域．

- RECALL：「μの100（1-α）%信頼区間」は

$$(X' - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ X' + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n})$$

だった．すなわち両側検定の場合，有意水準100α%でのX’の採択域は，μの100（1-α）%信頼区間を平行移動したものであり，

「μ_0がμの100（1－α）%信頼区間に入る」ことと

「X’の実現値が有意水準αでの採択域に入る」ことが同値．

（つまり区間推定をやれば両側検定の結果もわかる）

第14章 II. 母平均の検定

1-母分散が既知のとき（さらに続き）

【注意（教科書への補足）2】

- 片側検定の場合
  - 対立仮説H_1：$\mu > \mu_0$（右片側検定）のときは
    「①$Z \geqq z(\alpha)$で棄却，②$Z < z(\alpha)$で採択」
  - 対立仮説H_1：$\mu < \mu_0$（左片側検定）のときは
    「①$Z \leqq -z(\alpha)$で棄却，②$Z > -z(\alpha)$で採択」
- 正規母集団の仮定がなくても，標本サイズがある程度大きければX’の分布は正規分布で近似でき，同様に検定できる（区間推定のときと同じ）

第14章 II．母平均の検定

<u>1-母分散が未知のとき</u>

標本の不偏分散をU^2とする．統計量（スチューデント比）$T=(X'-\mu_0)/(U/\sqrt{n})$が自由度n-1のt分布に従うので，両側検定の場合：

① $|T| \geqq t_{n-1}(\alpha/2)$ **ならば** H_0**を棄却．**

② $|T| < t_{n-1}(\alpha/2)$ **ならば** H_0**を棄却しない（採択）．**

第14章 II．母平均の検定

<u>1-母分散が未知のとき（続き）</u>

【注意（教科書への補足）】･･･母分散既知の場合とほぼ同様

- **標本平均X'を検定統計量としてX'の棄却域を考えるなら**

$$P\left(t_{n-1}(\alpha/2) \leqq T \leqq t_{n-1}(\alpha/2) \right) = \gamma \quad (=1-\alpha)$$

を同値変形して

$$P\left(\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \leqq X' \leqq \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \right) = \gamma$$

となるから，

$$\left(\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \right)$$

がX'の採択域で、この外が棄却域．

- **両側検定の場合，「有意水準100α%でのX'の採択域がμの100（1-α）%信頼区間を平行移動したもの」となるのも母分散既知の場合と同様．**

- **片側検定なら（対立仮説H_1が$\mu > \mu_0$または$\mu < \mu_0$）**

  「①$T \geqq t_{n-1}(\alpha)$ **で棄却，**②$T < t_{n-1}(\alpha)$ **で採択**」（$H_1 : \mu > \mu_0$）

  または

  「①$T \leqq -t_{n-1}(\alpha)$ **で棄却，**②$T > -t_{n-1}(\alpha)$ **で採択**」（$H_1 : \mu < \mu_0$）

- **t分布を用いるので正規母集団の仮定は必須．**

第14章 IV. 平均値の差の検定

2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2),\ N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

に関して，これらの母集団の平均値が等しいかどうかを調べる．つまり

帰無仮説H_0：$\mu_1 = \mu_2$

を検定する．

<u>1-母分散が既知のとき</u>（あまり現実的ではないが・・・）

2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2),\ N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\},\ \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とする（σ_1^2，σ_2^2は既知）．

- 標本平均をそれぞれ X', Y' とすると

$$X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1),\ Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$$

第14章 IV. 平均値の差の検定

<u>1-母分散が既知のとき（続き）</u>

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$，$Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$ より

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$$

- よって標準化変数：

$$Z = \{(X'-Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2\}}$$

  が N(0,1) に従う．

- 分布さえ決まってしまえば，あとの手順はII．でやった検定と同様！
- ［注意］教科書には

  両側検定の場合（対立仮説H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$）

  しか載っていないが，事前に大小関係を予測できるなら

  片側検定（H_1：$\mu_1 > \mu_2$ またはH_1：$\mu_1 < \mu_2$）

  も当然あり得る．

第14章 IV. 平均値の差の検定

1-母分散が既知のとき (補足)

特に $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (すなわち等分散) のときは

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$

  より

  $$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2))$$

- よって標準化変数:

  $$Z = \{(X'-Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}$$

  が N (0,1) に従う.

  (次にやる「2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき」と比較せよ)

第14章 IV. 平均値の差の検定

1-母分散が既知のとき (補足)

母分散既知で等分散の場合についてまとめると以下の通り:
(標本平均X', Y' の実現値をそれぞれ x', y' とする)

(1) [両側検定] H_0: $\mu_1 = \mu_2$, 対立仮説H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
に対し, 有意水準αで検定するとき,

$$z := \{(x' - y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}$$

とおくと,

$|z| \geqq z(\alpha/2)$ のときH_0が有意水準αで棄却される.

(2) [(右) 片側検定] H_0: $\mu_1 = \mu_2$, 対立仮説H_1: $\mu_1 > \mu_2$
に対し, 有意水準αで検定するとき,

$z \geqq z(\alpha)$ のときH_0が有意水準αで棄却される.

第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき

次の定理を用いる（教科書とは記述の方法が異なるので注意！）：

定理

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2) \ , N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\}, \ \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\}$$

とし，これらの標本の平均，不偏分散をそれぞれX', Y' U_1^2, U_2^2 とする．

このとき，確率変数

$$T := \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 \ (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

は自由度n_1+n_2-2 のt分布に従う．

ただし，S_p^2はU_1^2, U_2^2の統合分散と呼ばれ，

$$S_p^2 := \{(n_1-1)U_1^2 + (n_2-1)U_2^2\} \ / \ (n_1+n_2-2)$$

$$= \{\Sigma (X_i - X')^2 + \Sigma (Y_i - Y')^2\} / \ (n_1+n_2-2)$$

第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

【注意1】

$$T = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

と，母分散（σ^2）既知の場合の

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \ \sigma^2 / (1/n_1 + 1/n_2))$$

の標準化変数：

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{\sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

の類似に注意．

母分散σ^2が統合分散

$$S_p^2 = \{(n_1-1)U_1^2 + (n_2-1)U_2^2\} / (n_1+n_2-2)$$

に置き換わっただけ．

第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

統合分散の意味するところ：

$$S_p^2 = \{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2\} / (n_1+n_2-2)$$
$$= \{(n_1-1)U_1^2+(n_2-1)U_2^2\} / \{(n_1-1)+(n_2-1)\}$$

であるから，U_1^2, U_2^2の重み付き平均とみなすこともできる．

ここで

$E(S_p^2)$

$$= \{(n_1-1)E(U_1^2) + (n_2-1)E(U_2^2)\} / \{(n_1-1)+(n_2-1)\})$$
$$= \{(n_1-1)\sigma^2+(n_2-1)\sigma^2\} / \{(n_1-1)+(n_2-1)\}$$
$$= \sigma^2$$

より，S_p^2はσ^2の不偏推定量になっている．

第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（続き）

【注意2】

- 定理の証明は割愛．とりあえず内容をよく理解して使えればよいです．
- 等分散の仮定は本質的．

第14章 IV. 平均値の差の検定

2-母分散が未知だが等しいことは既知のとき（まとめ）
標本平均X', Y' の実現値をそれぞれ x', y' とする．
自由度 $\nu = n_1 + n_2 - 2$ とおく．

（1）［両側検定］帰無仮説 H_0： $\mu_1 = \mu_2$ ，対立仮説 H_1： $\mu_1 \neq \mu_2$
に対し，有意水準 α で検定するとき，

$$t_0 := \{(x' - y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{s_p^2 \ (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

（すなわち定理のTの実現値）とおくと，
$|t_0| \geqq t_\nu(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される．

（2）［（右）片側検定］帰無仮説 H_0：$\mu_1 = \mu_2$，対立仮説 H_1：$\mu_1 > \mu_2$
に対し，有意水準 α で検定するとき，
$t_0 \geqq t_\nu(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される．

【注意】教科書（第1刷）p.120例題6ミスあり！
問題文に「不偏分散3.4」「不偏分散3.8」とあるが、解答を見ると（不偏でない）「分散」として扱っている．