

統計 (MI)

第3回 t分布(応用編)

授業担当: 徳永伸一

東京医科歯科大学教養部 数学講座

今日の授業の概要:

- 前回の復習 (t 分布の基礎)
- 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測

第2回の復習(その1)

6.1 母分散が未知の場合の母平均の推測 **RECALL**

- 標本サイズが大きければ σ^2 を s^2 で近似して母分散既知の問題に帰着させればよい.
- 小標本の場合 → t 分布を利用.
 - 仮定: 正規母集団
 - 理論的には必須!
 - 問題文で明記されていなければ仮定を付け加える.
(「本当に仮定してよいかどうか」に注意しつつ)
 - 次の定理を用いる:

第2回の復習(その2)

定理6.1 RECALL

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの、大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ について、標本平均 $\bar{X}$ 、標本分散(不偏分散)を S^2 とする。このとき、確率変数

$$T := (\bar{X} - \mu) / (S / \sqrt{n})$$

は自由度 $n-1$ の t 分布(と呼ばれる分布)に従う。

第2回の復習 (その3)

注意と補足 RECALL

- $T = (X' - \mu) / (S / \sqrt{n})$ はスチューデント比と呼ばれる.
- 「正規母集団」の仮定はt分布を利用する上で本質的に重要.
- 標本平均 X' の標準化変数 $Z = (X' - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ との類似に注意.
 - つまり n が大きければ, $T \rightarrow Z$ であるということ.
- (スチューデントの)t分布について:
 - 自由度 ν 大きいほど標準正規分布 $N(0,1)$ に近づき, $\nu = \infty$ で完全に一致.
 - 自由度 ν のt分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $t_{\nu}(\alpha)$ で表す.

第2回の復習 (その4)

t分布を利用した μ の推定・検定

- 母分散 σ^2 が未知の正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの、大きさ n の無作為標本 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ について、標本平均 $\bar{x}$ 、標本分散 (不偏分散) を s^2 とする。

このとき

$$t = (\bar{x} - \mu) / (s / \sqrt{n}) \sim (\text{自由度 } n-1 \text{ の } t \text{ 分布})$$

だから

- 母平均 μ の信頼度 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間は

$$(\bar{x} - t_{n-1}(\alpha/2) s / \sqrt{n}, \bar{x} + t_{n-1}(\alpha/2) s / \sqrt{n})$$

- 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ 、対立仮説 $H_1: \mu \neq \mu_0$ に対し、有意水準 α で (両側) 検定するとき、 $\bar{x}$ の棄却域は

$$(\mu_0 - t_{n-1}(\alpha/2) s / \sqrt{n}, \mu_0 + t_{n-1}(\alpha/2) s / \sqrt{n})$$

の補集合。

第2回の復習 (その5)

t分布を利用した μ の推定・検定 (続き) RECALL

- もしくは $t_0 = (x' - \mu) / (s / \sqrt{n})$ とおけば, t_0 の棄却域は

$$| t_0 | > t_{n-1}(\alpha/2)$$

と表される.

- 帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1: \mu > \mu_0$ に対し, 有意水準 α で (片側) 検定するとき, x' の棄却域は

$$x' > \mu_0 + t_{n-1}(\alpha) s / \sqrt{n}$$

と表される. また上と同じように t_0 を置けば, t_0 の棄却域は

$$t_0 > t_{n-1}(\alpha)$$

と表される.

【注意】 やってることは母分散既知の場合と大差ない. 自由度という新たなパラメータが出てきただけ.

第2回の復習(その6)

- 「対応のある2標本」 「独立な2標本(6.2)」
- 対データの差をデータとして解析を行うので、
実質的には1標本問題(すなわち6.1で扱った
ケースとほぼ同じ手法・解法)。
 - 「独立な2標本」の場合(6.2)よりずっと単純！

第2回の復習(その7)

- 母分散未知のケースを考えている.
→ t分布の利用(正規母集団の仮定が必要).
- n 個の対をなす標本データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ から
$$d_1 = x_1 - y_1, d_2 = x_2 - y_2, \dots, d_n = x_n - y_n$$
を算定.
- 2つの母平均をそれぞれ μ_1, μ_2 とし,
$$d' = \sum d_i / n, s^2 = \sum (d_i - d')^2 / (n - 1)$$
とおくと
$$T := (d' - (\mu_1 - \mu_2)) / (s / \sqrt{n})$$
が自由度 $n-1$ の t 分布に従う.
- 以下はこれまでと同じ要領.

第2回の復習(その8)

(1) [区間推定] 母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の信頼係数 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\left(d' - t_{n-1}(\alpha/2) s / \sqrt{n}, d' + t_{n-1}(\alpha/2) s / \sqrt{n} \right)$$

(2) [両側検定]

帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
に対し, 有意水準 α で検定する場合,

$$t_0 := d' / (s / \sqrt{n})$$

とおくと, $|t_0| \geq t_{n-1}(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(3) [片側検定]

帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$
に対し, 有意水準 α で検定する場合, $t_0 \geq t_{n-1}(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

第2回の補足

最後にもう一度念押し

- 6.1について:
 - やってることは第5章と大差ない(t 分布が新たに導入されただけ).
- 6.4について:
 - 2標本問題だが「対応のある場合」は実質1標本のケースと同じ.
 - その意味で, 6.2でやる「独立な2標本」の手法とは本質的に異なる.

では6.2へ.

今日新たに学ぶこと

- 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測

【注意】

- 「新たに」といっても実は生物学実験(ウズラのホルモンに関する実験)で既に使ってます。
- 生物学実験テキストp.91参照。

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(1)

- 「2つの母集団分布の平均について、差があるか否か、差があるとすればどの位の差なのか、を考える」
- 「独立な2標本」 「対応のある2標本(6.4)」
 - 大雑把に言って、データが対になっていなければ独立(別々の母集団から得た標本など)。
- 一見ゴツい式が出てきますが、やってることは見かけほど複雑ではありません。
- とりあえず正規母集団は仮定しておく。

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(2)

まず母分散が既知の場合を考えてみる

(あまり現実的ではないが原理をよく理解するため)

2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \dots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}\}$$

とする(σ_1^2, σ_2^2 は既知)。

- 標本平均をそれぞれ X', Y' とすると

$$X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1), Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$$

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(3)

母分散が既知の場合(続き)

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$ より
$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$$

- よって標準化変数:

$$Z = \{ (X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2) \} / \sqrt{ \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2 }$$

が $N(0,1)$ に従う.

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(4)

母分散が既知の場合(続き)

特に $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (すなわち等分散) のときは

- $X' \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1)$, $Y' \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2)$
より

$$X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2(1/n_1 + 1/n_2))$$

- よって標準化変数:

$$Z = \{(X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}$$

が $N(0,1)$ に従う.

- 分布さえ決まってしまうと、あとの手順はこれまでと同様!

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(5)

以上より, 母分散既知で等分散の場合の推定・検定は以下の通り:

(標本平均 X' , Y' の実現値をそれぞれ x' , y' とする)

(1) [区間推定] 2つの母集団の母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の,
信頼度 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間:

$$\left(x' - y' - z(\alpha/2) \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}, \right. \\ \left. x' - y' + z(\alpha/2) \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)} \right)$$

(2) [両側検定] 帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$$z := \{(x' - y') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}$$

とおくと,

$|z| \geq z(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(3) [片側検定] 帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$z \geq z(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(6)

母分散が未知だが等しい場合

次の定理を用いる:

定理6.2

分散の等しい2つの正規母集団

$$N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$$

からそれぞれ独立に無作為抽出された標本を

$$\{X_1, X_2, \dots, X_{n_1}\}, \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}\}$$

とし, これらにもとづく標本平均, 標本分散(不偏分散)をそれぞれ $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ とする.

このとき, 確率変数

$$T := \{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ のt分布に従う.

ただし, S_p^2 は S_1^2, S_2^2 の統合分散と呼ばれ,

$$S_p^2 := \{ \sum (X_i - \bar{X})^2 + \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \} / (n_1 + n_2 - 2)$$

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(7)

【注意1】

$T = \{ (X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2) \} / \sqrt{ \{ S_p^2 (1/n_1 + 1/n_2) \} }$
と、母分散 (σ^2) 既知の場合の
 $X' - Y' \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 / (1/n_1 + 1/n_2))$
の標準化変数:

$Z = \{ (X' - Y') - (\mu_1 - \mu_2) \} / \sqrt{ \{ \sigma^2 (1/n_1 + 1/n_2) \} }$
の類似に注意.

σ^2 が統合分散

$S_p^2 = \{ \sum (X_i - X')^2 + \sum (Y_i - Y')^2 \} / (n_1 + n_2 - 2)$
に置き換わっただけ.

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(8)

統合分散の意味するところ:

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \{ \sum (X_i - \bar{X})^2 + \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \} / (n_1 + n_2 - 2) \\ &= \{ (n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2 \} / \{ (n_1 - 1) + (n_2 - 1) \} \end{aligned}$$

であるから, S_1^2, S_2^2 の重み付き平均とみなすこともできる.

ここで

$$E(S_p^2)$$

$$= \{ (n_1 - 1) E(S_1^2) + (n_2 - 1) E(S_2^2) \} / \{ (n_1 - 1) + (n_2 - 1) \}$$

$$= \{ (n_1 - 1) \sigma^2 + (n_2 - 1) \sigma^2 \} / \{ (n_1 - 1) + (n_2 - 1) \}$$

$$= \sigma^2$$

より, S_p^2 は σ^2 の不偏推定量になっている.

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(7)

【注意2】

- 定理6.2の証明は割愛．とりあえず内容をよく理解して使えればよいです．
- 等分散の仮定は本質的．

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(8)

自由度 $v = n_1 + n_2 - 2$ とおく.

(1) [区間推定] 2つの母集団の母平均の差 $\mu_1 - \mu_2$ の,
信頼度 $\gamma = 1 - \alpha$ の信頼区間:

$$\left(\bar{x}' - \bar{y}' - t_v(\alpha/2) \sqrt{\{s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}, \right. \\ \left. \bar{x}' - \bar{y}' + t_v(\alpha/2) \sqrt{\{s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}} \right)$$

(2) [両側検定] 帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$$t_0 := \{(\bar{x}' - \bar{y}') - (\mu_1 - \mu_2)\} / \sqrt{\{s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}}$$

(すなわち定理6.2のTの実現値) とおくと,

$|t_0| > t_v(\alpha/2)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

(3) [片側検定] 帰無仮説 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$, 対立仮説 $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$
に対し, 有意水準 α で検定するとき,

$t_0 > t_v(\alpha)$ のとき H_0 が有意水準 α で棄却される.

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測(9)

例題6.2

ある会社の40歳以上の社員について、血色素量の検査を実施したところ、以下の表の結果を得た。

	人数	平均値	不偏分散
男	32	15.6	1.61
女	30	13.2	3.26

- (1) 男女間の差の95%信頼区間を求めよ。
- (2) 男女間の差は有意といえるか、 t 検定にかけよ。ただし、有意水準は5%とせよ。(両側検定)
- (3) 男の方が女より大きい傾向にあることは分かっているものとして、男の方が女より有意に大きいといえるかどうかを、有意水準1%で t 検定にかけよ。(片側検定)

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (10)

問題文に関する注意

- 2つの母集団・・・「男」と「女」.
 - 標本サイズはそれぞれ32人と30人(同数でなくてよい).
- 正規母集団は仮定されている(問題文には書かれていないがそう考えるしかない).
- 等分散, すなわち男女で分散に差はないと仮定(同じ人間だから?).

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (11)

解答

	人数	平均値	不偏分散
男	$n_1 = 32$	$\bar{x}' = 15.6$	$s_1^2 = 1.61$
女	$n_2 = 30$	$\bar{y}' = 13.2$	$s_2^2 = 3.26$

- $\bar{x}' - \bar{y}' = 15.6 - 13.2 = 2.4$
- 統合分散 $s_p^2 = \{31 \cdot 1.61 + 29 \cdot 3.26\} / 60 = 2.4075$
- 自由度 $\nu = 32 + 30 - 2 = 60$
- $t_{60}(0.025) = 2.000$, $t_{60}(0.01) = 2.390$.

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (12)

解答(続き)

- $\bar{x}' - \bar{y}' = 2.4$, $s_p^2 = 2.4075$, $v = 60$,
- $t_v(\alpha/2) = t_{60}(0.025) = 2.000$.
- $t_v(\alpha) = t_{60}(0.01) = 2.390$.

(1) 95%信頼区間の両端の値は

$$\begin{aligned}\bar{x}' - \bar{y}' \pm t_v(\alpha/2) \sqrt{\{s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2)\}} \\ = 2.4 \pm 2.000 \sqrt{\{2.4075 (1/32 + 1/30)\}} \\ = 2.4 \pm 0.7886\end{aligned}$$

よって95%信頼区間は(1.64, 3.19)

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (13)

解答(続き)

(2) (両側検定)

$$\begin{aligned} t_0 &= \{ (x' - y') - (\mu_1 - \mu_2) \} / \sqrt{ \{ s_p^2 (1/n_1 + 1/n_2) \} } \\ &= \{ 2.4 - 0 \} / \sqrt{ \{ 2.4075 (1/32 + 1/30) \} } \\ &= 2.4 / 0.3943 \\ &= 6.087 > 2.000 = t_{60}(0.025) \end{aligned}$$

よって有意水準5%で棄却． 男女間に有意な差はある．

(3) (片側検定)

$$t_0 = 6.087 > 2.390 = t_{60}(0.01)$$

よって有意水準1%で棄却 男の方が女より高い．

6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測 (14)

【注意】

- 分散が等しい場合について学習したが, そういうケースはたくさんあるのだろうか?
- 例題6.2で, 「男女の分散が等しい」と仮定したのはそもそも妥当なのか? (標本分散の値にはかなり差があるけど許容範囲なのか?)
- 分散がほぼ同じに見えるが確信が持てない場合というのも多々あるだろう.
→ だったら「2つの母集団の分散が等しい」という仮説を検定すればよい!
→ 「6.3 等分散の検定 (F分布)」へ (次回).