統計II（MI）
第1回　統計Ｉの復習と統計IIの概要

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

この授業の位置付け

- １年前期の「統計I」に続く内容（歯学科１年後期「統計II」とほぼ同じ）．
- 大雑把には
  - 統計Ｉ：基礎概念・原理～推定・検定の基礎
  - 統計II：推定・検定の応用（実践的な手法）
- 教科書は昨年度までの

　　「メディカル・コメディカルの統計学」

　をそのまま使用します

　が，今年度の1年生から採用している

　　「臨床検査学講座 数学／統計学」（医歯薬出版）

　も参考になるかもしれません．

スケジュールと注意

- 第1回（今日）：主に統計Ⅰの復習（1年前の試験なども振り返りつつ）．
- 第2回（9月29日）～：ほぼ教科書第6章の内容．
- 試験は年内に湯島で実施予定．
  （12月15日14:10～に決定）
- 成績は試験によりますが，昨年の統計Ⅰの結果も一部反映させる予定．
- 試験でも統計Ⅰの内容を一部出題する予定．
- 短期間（今日を除くと実質1ヶ月ほど）で終わるので一回一回の内容をしっかり押さえましょう。
- 万が一欠席した場合は次回までに要点の確認を。

（スライドのアップロードが遅い場合は催促してください）

思い出して欲しいこと

統計学に対する徳永の考え：

- 客観的・合理的判断を下すための基本的な技術であり、特に医療従事者には必須の学問。教養以前。
- 「統計学のわかってない医者・歯医者には絶対にかかりたくない」（社会的要請）
- よって情け容赦は無用。

重要性の認識は共通しており、平成１７年度からは学士編入学生も必修に。

→では復習スタート

統計Ｉで何をやったか (1)

Overview (RECALL)

- 記述統計 (4章) ・・・・情報の要約
  - 表やグラフで表す
  - 代表値 (平均など) や散布度 (分散など) を求める

確率モデル (2・3章)

- 推測統計 (5章〜)
  - 推定 (点推定、区間推定)
  - 仮説検定

統計Ｉで何をやったか (2)

章ごとに重要項目をCheck

- 第1章・・・概論といくつかの基本概念の導入のみ
- 第2章・・・確率の基礎
  - 事象の独立性, ベイズの定理
- 第3章・・・確率変数と確率分布
  - 確率変数の平均と分散, 標準偏差
  - 確率変数の独立性
  - 2項分布, 正規分布
  - 中心極限定理
  - 2項分布の正規近似

統計Ⅰで何をやったか(3)

章ごとに重要項目をCheck(続き)

- 第4章・・・記述統計
  - 標本平均, 標本分散
  - 標本平均・標本比率の分布
- 第5章・・・推定・検定の基礎
  - 点推定・推定量の不偏性
  - 区間推定
  - 仮説検定・・・両側検定と片側検定

たったこれだけですよ。

平成16年度統計Ⅰ試験問題[1]

問題文:

「4つの事象 A,B,C,X に対し、確率 P(A), P(B), P(C), P(X|A), P(X|B), P(X|C) がわかっているとき、ベイズの定理により A,B,C がある条件を満たせばP(A|X)の値を計算することができる。この場合の『ある条件』を述べよ。」

「さらにこの条件が満たされているとして、P(A|X) を求める式を書け。」

- 「ベイズの定理」に関する問題.
- 「ほぼ毎回試験に出している」と予告してあったのでさすがに出来は良かった(医学科の場合).

念のため復習（ベイズの定理）

ベイズの定理 Bayes' Theorem　—— RECALL ——

事象 $A, B_1, B_2, \cdots B_r \in \Omega$ について

［仮定］① $\bigcup_{1 \leqq i \leqq r} B_i = \Omega$　　かつ

② 各 B_i は互いに排反

であるとき，

［結論］条件付確率 $P(B_1|A)$ に関して，以下の公式が成立つ．

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{\sum_{i=1}^{r} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

平成16年度統計Ｉ試験問題 [2]

問題文：

2つのサイコロを振ったとき、出る目の大きい方をX、平均値をYとする。

(1) XとYは離散型確率変数とみなせる。もしXとYが独立であるならば、どのようなことが成り立っていなければならないか。「確率変数の独立性」の定義に基づいて説明せよ。

★「定義を書け」という問題ではないよ！

(2) XとYが独立かどうかを判定せよ。

- 「確率変数の独立性」に関する問題．
- 「ほぼ毎回試験に出している」と言ったかどうか覚えていないが近年の過去問の傾向からほぼ予測可能な問題．
- の割には医学科・歯学科問わず出来が悪い．
  - 「事象の独立性」と混同する人が後を絶たない．
  - 「P (X)」って何？？（Xは事象じゃなくて確率変数なんだってば！）

「確率変数の独立性の定義」の復習その1

「確率変数の独立性」の定義（一般の場合） RECALL

確率変数X, Yについて

『任意の実数a,b,c,dに対し

事象「$a \leqq X \leqq b$」と事象「$c \leqq Y \leqq d$」が独立』,

すなわち

『任意の実数a,b,c,dに対し

$P(a \leqq X \leqq b$ かつ $c \leqq Y \leqq d)$

$= P(a \leqq X \leqq b)\,P(c \leqq Y \leqq d)$』

ならば「XとYは独立」という.

【注意1】「任意の・・・に対し」という条件は本質的.

【注意2】上の定義は離散的確率変数にも適用できる.

けど・・・

「確率変数の独立性の定義」の復習その2

離散的確率変数の場合

［定義］

X, Y：離散的確率変数 のとき

『X, Yのとり得るすべての値x, yについて

$P(X=x$ かつ $Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$』

ならば「XとYは独立」という.

【注意1】「一般の場合」で a=b=x, c=d=y とおいた だけ.

【注意2】「とり得るすべての値」：

X: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Y: 1, 1.5, 2, 2.5, ・・・5.5, 6

試験問題［2］（2）解答について

問題文：

「（2）X（大きい方）とY（平均）が独立かどうかを判定せよ。」

- そもそも独立か否か？
  →独立なわけない！（常にX≧Yである！！）
- 独立でないことを示すにはどうするか？
  →「すべての値x,yについて成り立つ」ことを否定すればいいのだから、
  『P（X=x かつ Y=y）≠ P（X=x）P（Y=y）』
  となる例を一つ示せばよい（いくらでもある）。

【注意】もし「独立であることを示す」問題だったら・・・
「すべての値x,yについて成り立つ」ことを示す必要があるからかなり大変！なのであまり試験には出しません
が、今年は裏をかいて出しました！

平成16年度統計Ｉ試験問題［3］

問題文：

X_1,X_2,X_3 を N（μ, σ²）に従う互いに独立な確率変数とするとき、以下の問いに答えよ。

（1） X_1,X_2,X_3を大きさ3の標本と見なしたとき、

$Y=(X_1+X_2+2X_3)/4$,

$Y'=(X_1+2X_2+3X_3)/7$,

$Y''=(X_1+2X_2+2X_3)/5$

の中でμの推定量としてもっとも優れているのはどれか。不偏性と分散に注目して決定せよ。

（2） μ=0, σ²=1 のとき、
「$X_1 > -0.25$ かつ $-1<X_2<1$」となる確率を求めよ。

（3） μ=2, σ²=4 のとき
「$W= X_1+2X_2+2X_3 > 8$」となる確率を求めよ。

試験問題 [3] その3

(1) について:

推定量の不偏性 RECALL

- 大雑把には「対応する母数より大きい(or小さい)値が得られやすい」といった傾向がないこと.

厳密には:

- [定義] 母数θの推定量θ'に対し,

$$E(\theta') = \theta$$

のときθ'をθの**不偏推定量**であるという.

- 不偏性がある推定量どうしなら分散(＝バラツキ)が小さい方がbetter！

平成16年度統計 I 試験問題 [4] その1

ある都市の高校3年生男子の中から、n=144人を無作為抽出して調べたところ、標本平均x"=171.0 cmであった。身長の母分散σ^2=36 cm^{2}であると仮定して以下の問いに答えよ。

(1) 上のデータに基づいて平均身長μに関する推定・検定を行うとき、「母集団分布が正規分布である」という仮定はなくても、(n=144を十分多いと見なせば)標準正規確率表を利用することができる。その理由を、根拠となる定理の名称や、その定理を適用できる理由なども含めて説明せよ。

(2) その都市の高校3年男子全体の平均身長μの95%信頼区間および90%信頼区間を求めよ。

(3) 10年前の調査によれば、その都市の10年前の高3男子の平均身長は170.0cmであったという。平均身長は変化したと考えられるか。有意水準5%で両側検定せよ。ただし、帰無仮説、対立仮説およびx"(標本平均)の棄却域を明示すること。

(4) (2)で求めた信頼区間と(3)の棄却域の関係について説明せよ。

平成16年度統計Ⅰ試験問題 [4] その2～（1）について

（母集団分布が正規分布でなくても）標準正規確率表を利用することができるための「根拠となる定理」とは
もちろんコレ↓です．

中心極限定理
$X_1, X_2, \cdots, X_n$が（任意の！）同じ分布に従う独立な確率変数ならば，
$n \to \infty$のとき，
和$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$の分布は
正規分布に収束する！

平成16年度統計Ⅰ試験問題 [4] その3～（1）の続き

「（中心極限）定理を適用できる理由」の説明：
（定理の仮定である）同一分布性および独立性の確認
- 同一分布性：同一の母集団から抽出したから
- 独立性：無作為抽出により保障される

定理（中心極限定理の系） RECALL
母平均μ，母分散σ^2である任意の母集団から抽出した大きさnの無作為標本にもとづく標本平均の分布は，nが十分大きければ，正規分布$N(\mu, \sigma^2/n)$で近似できる．

【注意】
母平均μ，母分散σ^2より
E（標本平均）＝ $\mu \times n \times (1/n)$ ＝ μ
V（標本平均）＝ $\sigma^2 \times n \times (1/n)^2$ ＝ σ^2/n
（期待値・分散の加法性↑）　（↑積に関するE,Vの性質より）

試験問題[4] その4～(2)について

「平均身長μの95%信頼区間および90%信頼区間を求めよ」という問題.
(教科書の例題の数値を変えただけ)
軽くおさらい:
<u>母平均μの区間推定について</u>RECALL

- $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ と近似できる.
  - 注意:正規母集団を仮定すれば厳密.
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ と標準化すると $Z \sim N(0, 1)$
- $P(-z(\alpha/2) \leqq Z \leqq z(\alpha/2)) = \gamma$
  - ただし $\gamma = 1-\alpha$. $z(\alpha)$ は $P(Z \geqq z(\alpha)) = \alpha$ を満たす値.
- ↑を同値変形すると

$$P(\bar{X} - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \leqq \mu \leqq \bar{X} + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}) = \gamma$$

よって「μの(100×γ)%信頼区間」は

$$(\bar{X} - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ \bar{X} + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n})$$

試験問題[4] その4～(3)について

「(μについて)有意水準5%で両側検定せよ」という問題
(これも教科書の例題の数値を変えただけ)
<u>帰無仮説に基づく推論</u>RECALL

- $P(-z(\alpha/2) \leqq Z \leqq z(\alpha/2)) = \gamma$
  (ただし $\gamma = 1-\alpha$)を考えるのは推定のときと同じ.
- こんどは次のように同値変形:

$$P(\mu - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n} \leqq \bar{X} \leqq \mu + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}) = \gamma$$

よって

$$(\mu - z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ \mu + z(\alpha/2)\ \sigma/\sqrt{n})$$

が採択域で、この外が棄却域.

試験問題 [4] その4～ (4) について

- 有意水準5%での両側検定における$\bar{X}$の採択域は，μの95%信頼区間を平行移動したもの．
- 母平均に関しては区間推定と両側検定が密接に関係している (信頼区間を見れば検定結果がわかる) ．
  - 具体的には，帰無仮説H_0： $\mu = \mu_0$，
    対立仮説H_0： $\mu \neq \mu_0$ に対し
    「μ_0がμの100 (1－α) %信頼区間に入る」こと　と
    「$\bar{X}$の実現値が有意水準αでの採択域に入る」ことが同値．
  - (3) ではμ_0＝170.0が (2) で求めた95%信頼区間に入るかどうかを調べれば，計算せずとも検定結果がわかる．

試験問題 [5]

あるサイコロを10回投げたとき、偶数の目が出る回数をXとする。Xの値に基づいて「このサイコロが歪んでいるかどうか」を判定する検定問題を考えるとき、以下の問いに答えよ。
(1) Xの期待値と分散を求めよ。
(2) P (X ≦ 2) の値を厳密に (正規近似を用いずに) 求めよ。
(3) 有意水準 3% におけるXの両側棄却域および片側 (右側とせよ) 棄却域をそれぞれ求めよ。

- 2項分布に関する問題．
- X～B (10,0.5)
- 正規近似は不要
  - 厳密値が簡単に計算できるなら近似値を敢えて計算する必要はない！
  - 片側検定の場合，P (X ≦ 1) ，P (X ≦ 2) などを計算して有意水準と比較すればよい (両側ならそれぞれ2倍した値と比較) ．

[復習] 2項分布binomial distribution

X〜B(n,p)のとき

$$P(X=x)={}_nC_x \cdot p^x \cdot (1-p)^{(n-x)}$$

$$E(X)=np, \quad V(X)=np(1-p)$$

二項分布の正規近似

中心極限定理により，nが十分大きいとき，

B(n,p)はN(np, np(1-p))で近似できる．

よって標準化変数

$$Z = (X-E(X))/\sqrt{V(X)} = (X-np)/\sqrt{np(1-p)}$$

は近似的にN(0,1)に従う．

∵ B(n,p)に従う確率変数は，B(1,p)に従う　**独立な**n個の確率変数の和と見なせるから．

平成16年度試験問題 [6]

問題文

「野球における打率とは、安打(ヒット)数を打数で割ったものである。イチロー選手は今シーズン、9月27日までに673打数251安打の成績を残している。」

「残り7試合で30打数あるとし、これまでと同じ打率でヒットを打ち続けるとすると、1シーズン257安打の大リーグ記録を樹立する(あと6本以上ヒットを打つ)確率はいくらか。

「2項分布の正規近似を利用して計算せよ。」

試験問題 [6] の考え方 (その1)

- 「これまでと同じ打率」＝251/673　0.373
- X:残り30打数の安打数とすれば

  X〜B (30,0.373)

よって

- 期待値 μ ＝E (X) ＝30×0.373　11.2

  →「6本以上」は (確率計算せずとも感覚的に) 余裕。
- 分散V (X) ＝30×0.373×0.627　7.0
- 標準偏差 σ ＝$\sqrt{7.0}$　2.65

よって、だいたいP (X≧ μ －2 σ) と同じ。

試験問題 [6] の考え方 (その2)

つまり・・・

P (X≧6)　P (X≧ μ －2 σ)

P (X≧ μ －1.96 σ) ＝ 0.975

言いたいこと:

- もうちょっと大雑把に考えても、「確率はかなり100%に近い」ことは容易に見当がつく (そもそもみんな記録達成を信じていたはずだ！)。
  - 計算間違い等で正解と掛け離れた値が出ても間違いに気付くことができる。
- こういった日常的な材料から問題を考えて「統計的感覚」を養いましょう。

実際の結果は・・・

[最終成績] (673→) 704打数 (251→) 262安打

すなわち9月28日以降、31打数11安打。

次回以降の内容

- 第6章 推定･検定の実際（Ⅰ）
  - 6.1 母分散が未知の場合の母平均の推測（t分布）
  - 6.2 独立な2標本にもとづく母平均の差に関する推測
  - 6.3 等分散の検定（F分布）
  - 6.4 対応のある2標本にもとづく母平均の差に関する推測（t分布）
  - 6.5 母集団比率に関する推測（正規近似）
  - 6.6 適合度検定（χ^2検定）

【注意】6.2, 6.3, 6.4, 6.6 の内容は旧カリキュラムの「数学」では取り上げていませんでした（よって過去問は2年分しか存在しない）