# 統計（医療統計）

# 第８回　１３章 母平均の区間推定

授業担当：徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

# Overview

- 確率（9章）
- 記述統計（10章）・・・・情報の要約
  - 表やグラフで表す
  - 代表値（平均など）や散布度（分散など）を求める

確率モデル（11章）

- 推測統計（13章～）
  - 推定（点推定、区間推定）（13章）
  - 仮説検定（14章）

# 第11章　確率変数と確率分布

## Ⅰ．　確率変数と確率分布の定義

1-確率変数の定義

・・・　離散型と連続型

2-離散型確率変数の確率分布

3-連続型確率変数の確率分布

・・・　確率密度関数

## Ⅱ．　確率変数の特性値

1-期待値と分散・標準偏差の定義

2-確率変数の期待値と分散の性質

・・・　期待値の加法性

3-確率変数の標準化

# 第11章　確率変数と確率分布

Ⅲ．確率変数の独立性

1. 確率変数の独立性の定義
2. 独立な確率変数の性質

Ⅳ．代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など
- 正規分布の線形変換・標準化・再生性

Ⅴ．中心極限定理と正規近似

1. 中心極限定理
2. 2項分布の正規近似・・・半整数補正

Ⅵ．標本分布

- 標本平均の分布

# 第13章　推定

Ⅰ．母集団と標本

Ⅱ．点推定

- 不偏性，不偏推定量

Ⅲ．区間推定

Ⅳ．母平均の区間推定

1. 母分散が既知のとき　←前期ここまで
2. 母分散が未知のとき

Ⅴ．母分散の区間推定

Ⅵ．母比率の区間推定　（←前期に先取り）

## [復習（11章）] 標本平均の分布・まとめ（対比して再確認）

**定理(正規分布の性質より)**

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う母集団から無作為抽出した標本とすると

$$\text{標本平均 } \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

**定理(中心極限定理の系)**

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を平均$\mu$, 分散$\sigma^2$である任意の母集団から無作為抽出した標本とするとき,

標本サイズnが十分大きければ, 近似的に

$$\text{標本平均 } \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

となる.

★「3-その他の重要な標本分布」は後回し(13・14章にて).

# 19年度・20年度中間試験問題より

（19年度）

［3］（3）EXCELでRAND関数により10（列）×1000行の乱数表を作成し、さらに各行において10個の値の平均を求めた。この平均の値はどのような分布をとるか。理由と共にわかりやすい日本語で説明せよ。

（20年度）

［3］EXCELにおけるRAND関数は 0 以上 1 未満の値をランダムに取る。この値 $X$ を確率変数と見なしたとき、以下の問いに答えよ。

（1）$X$ が従う分布の確率密度関数 $f(x)$ はどのような関数となるか。適切に記述せよ。

（2）$X$ の期待値 $\mu$ と分散 $\sigma^2$ を、（連続型）確率変数の期待値と分散の定義に基づいて求めよ。

（3）RAND関数で得た10個の値の平均を $Y$ とする。$Y$ はどのような確率分布で近似できると考えられるか。理由と共に述べよ。

# 【重要】「標本数」と「標本サイズ」

「標本」とは，母集団から取り出したデータの値の「集合」である！

- １回の標本抽出により、１つの標本が得られる。
- ［標本に含まれるデータの値の個数］
  ＝「標本サイズ（標本の大きさ）」

★EXCEL実習3aの例では10列×1000行の値を標本サイズ10、1000標本（標本数1000）と見なして扱った。

★教科書p.105「取りだした標本の数を標本の大きさという」は不適切な記述。

# 第13章　推定

Ⅰ．母集団と標本　　←前回ここから

Ⅱ．点推定

- 不偏性，不偏推定量

Ⅲ．区間推定

Ⅳ．母平均の区間推定

1. 母分散が既知のとき　←前回ここまで
2. 母分散が未知のとき

Ⅴ．母分散の区間推定・・・省略

Ⅵ．母比率の区間推定

# Ⅰ．母集団と標本

KEYWORDS：

- 母集団⇔標本sample，無作為標本
- 母平均，母分散
- 層別，層別抽出stratified sampling
- 乱数

# [復習] Ⅱ．点推定（1）

KEYWORDS：

- 母数，母集団パラメータ
  - 母平均，母分散
- （標本）統計量，統計値（統計量の実現値）
  - 標本平均，標本分散，標本比率
- 推定量（母数の推定に用いる統計量），
  推定値（推定量の実現値）

## 点推定と区間推定

- 点推定：「無作為に選んだ標本から数値を得て，それから推定量の推定値を計算し，その推定値がイコール母数であるとする推定方法」
- 区間推定：「推定値から，”ある確率である数値の区間の中にある”とする推定方法」

# [復習] Ⅱ．点推定（2）

推定量が「不偏unbiasedである（偏りがない）」とは:

- 「対応する母数より大きい（or小さい）値が得られやすい」といった傾向がない.
- その推定量を繰り返し実測し、得られた値（推定値）の平均値は，繰り返しの回数を増やすほど対応する母数に近づく.

厳密には:

- [定義] 母数 $\theta$ の推定量 $\theta'$ に対し,

$$E(\theta') = \theta$$

のとき $\theta'$ を $\theta$ の不偏推定量（不偏性を持つ推定量）であるという.

# [復習] Ⅱ．点推定（3）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$に対し

不偏分散　$U^2 := \{\Sigma(X_k - \bar{X})^2\} / (n-1)$

　は，母分散$\sigma^2$の不偏推定量．

- すなわち，$E(U^2) = \sigma^2$　である（証明は割愛）．

ということは

- 分散$S^2 := \{\Sigma(X_k - \bar{X})^2\} / n$ については，

  $E(S^2) = E(((n-1)/n)U^2) = ((n-1)/n)\sigma^2$

- つまり $S^2$の実測値は，母分散より小さめの値をとる傾向にある（すなわち不偏でない）．

# [復習] 不偏性に関する補足

- 標本平均 $\bar{X} := \Sigma X_k / n$ も母平均 $\mu$ の不偏推定量.

  $\because E(\bar{X}) = E(\Sigma X_k / n) = \Sigma E(X_k)/n = \mu$

- たとえばn=3のとき $X' = (X_1 + X_2 + 2X_3)/4$ とおいても $X'$ は $\mu$ の不偏推定量(確認せよ).
- 不偏分散の平方根 $U = \sqrt{(U^2)}$ は, $\sigma$ の不偏推定量ではない！

  $\because E(U) = E(\sqrt{(U^2)}) \neq \sqrt{(E(U^2))} = \sigma$

# ［復習］ Ⅲ． 区間推定

## 区間推定とは

- 「母数の値をズバリ推定するより，母数が（高い確率で）存在する区間を推定する」という考え方．
- 「推定値が母数にどのくらい近いか（誤差がどのぐらいあるか）」も含めて推定する．

## 具体的には

- 「母数θが区間Ｉに含まれる確率が○％」といった形の推定を行なう．
  - 「θの推定値θ’の誤差が確率○％でd以下」と考えても同じ。
  - $|\theta-\theta'| \leqq d \iff \theta \in [\theta'-d,\ \theta'+d]\ (=I)$
- ↑における
  - 区間・・・（○％）信頼区間
  - 確率・・・信頼度（または信頼係数）・・・95％，99％など

# [復習]　Ⅳ．母平均の区間推定

## 母平均$\mu$の区間推定（母分散既知の場合）

問題設定：

- 標本サイズn，標本平均 $\bar{X}$ の実測値が与えられており，母分散$\sigma^2$は既知とする．
- 母集団分布・・・正規分布なら好都合だが，任意の分布でもnが大きければ，標本平均の分布は中心極限定理により正規分布で近似可能．

以上の条件のもとで，

「$\mu$の 100$\gamma$%信頼区間」

を求める（$\gamma$は信頼度＝信頼係数で，具体的には0.95, 0.99, 0.90など）．

→続いて信頼区間の求め方，でもその前に・・・

[再確認]　Ⅵ. 標本分布（2）

## 標本平均の期待値と分散・標準偏差

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を平均 $\mu$，分散 $\sigma^2$ である母集団から無作為抽出した標本とするとき，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はそれぞれ，期待値 $\mu$，分散 $\sigma^2$ の互いに独立な確率変数と見なせる．

よって標本平均 $\bar{X}$ について

$$E(\bar{X}) = \mu \times n \times (1/n) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma^2 \times n \times (1/n)^2 = \sigma^2/n$$

（期待値・分散の加法性↑）　（↑積に関するE,Vの性質より）

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{(\sigma^2/n)} = \sigma / \sqrt{n}$$

## [再確認] 標本平均の分布・まとめ（対比して再確認）

**定理（正規分布の性質より）**

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う母集団から無作為抽出した標本とすると

$$\text{標本平均 } \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

**定理（中心極限定理の系）**

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を平均$\mu$，分散$\sigma^2$である任意の母集団から無作為抽出した標本とするとき，

標本サイズnが十分大きければ，近似的に

$$\text{標本平均 } \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

となる．

★以上を踏まえて区間推定の具体的な方法へ

# [復習]　Ⅳ．母平均の区間推定

## 母平均$\mu$の区間推定(母分散既知)の解法

- $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$と近似(中心極限定理による).
  - 注意:正規母集団を仮定すれば厳密.
- $Z=(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ と標準化すると $Z \sim N(0, 1)$
- $P(-z(\alpha/2) \leqq Z \leqq z(\alpha/2))=\gamma$
  - ただし$\gamma=1-\alpha$. $z(\alpha)$ は $P(Z \geqq z(\alpha))=\alpha$ を満たす値.
  - たとえば$\gamma=0.95$ のとき$\alpha/2=0.025$, $z(\alpha/2)=z(0.025)=1.96$
  - $z(\alpha/2)$は「上側$100(\alpha/2)$%点」と呼ばれる.
- ↑を同値変形すると

$$P(\bar{X}-z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n} \leqq \mu \leqq \bar{X}+z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n})=\gamma$$

よって「$\mu$の$(100\times\gamma)$%信頼区間」は

$$(\bar{X}-z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n} \quad \bar{X}+z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n})$$

# [復習] Ⅳ. 母平均の区間推定

教科書p.107例題1

コレステロールの平均値$\mu$の区間推定

- 母集団・・・成人男子
  （正規分布はp.106で仮定）
- 標本サイズn＝36（人）
- 標本平均$\bar{x}$＝63（mg/dl）・・・$\mu$の点推定値
- 母標準偏差$\sigma$＝12（ mg/dl ）

以上の条件のもとで，

「$\mu$の95%信頼区間を求めよ」という問題.

（信頼度95%）

# [復習（追記あり）] Ⅳ．母平均の区間推定

例題1に関する補足

- 正規母集団の仮定がどこにも明記されていなければ，下記のいずれかの方針で考える．
  - 正規母集団に十分近い分布であると考えて，正規母集団の仮定を導入．
  - n＝36を十分大きいと見なし，標本平均の分布を正規分布で近似(中心極限定理より)．
  - **教科書では13章「Ⅰ」の末尾(p.106)において正規母集団が仮定されている．**

    **★ただしカッコ内の説明はおかしいので無視してください．**

    **「母集団が小さければ正規母集団を仮定できない」は正しいが、**

    **「母集団が大きければ正規母集団を仮定できる」とは限らない。**

- 公式( $\bar{X} - z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n}$ , $\bar{X} + z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n}$ )

  に値を代入すれば一応答えは出ます．

- 母標準偏差σの値が既知というのは，かなり虫のいい仮定．
  - 現実的にはあまりないケースと思われるが，基本的な原理と手法を理解するためにあえて導入している．

# [復習] Ⅳ. 母平均の区間推定

「$\mu$ の(100× $\gamma$ )%信頼区間」:

$$\left( \bar{X} - z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n} \;,\; \bar{X} + z(\alpha/2)\,\sigma/\sqrt{n} \right)$$

について:

- 標本平均(の実測値)を中心とする区間である.
- $\sigma/\sqrt{n}$ は**標準誤差**と呼ばれる.

[その他の重要な考察]

- $\gamma$ を大きくすると・・・
  - $\alpha = 1-\gamma$ は小さくなる → $z(\alpha/2)$ は大きくなる.
    →信頼区間の幅が大きくなる.
  
  (外れる確率を減らすのだから、幅を大きく取る必要があるのは当然)
- nを大きくすると → 信頼区間の幅が小さくなる.
  - 情報量が増えるのだから, 誤差が減るのは当然

# ［復習］Ⅳ．母平均の区間推定

「母分散既知の場合」のポイントをまとめると

- 母分散$\sigma^2$を用いて標本平均の分布が表せる．
- 母集団分布が正規分布なら標本平均の分布も正規分布．
- 正規母集団を仮定せずとも，標本サイズnが十分大きければ標本平均の分布は正規分布で近似でき，いずれにしても正規分布の問題に帰着できる．
- だがその（標本平均が従う）正規分布$N(\mu, \sigma^2/n)$は，母分散$\sigma^2$を用いて表されているのだから，$\sigma^2$の値がわからないと推測できない．
- 現実には$\sigma^2$は未知のケースが多い！

→「母分散未知」のケースへ．



S. TOKUNAGA

# Ⅳ．母平均の区間推定（母分散未知）

母平均$\mu$の区間推定（母分散未知の場合）

母分散$\sigma^2$が未知であっても

標本の不偏分散 $U^2 := \{ \Sigma ( x_i - \bar{x} )^2 \} / (n-1)$

は，常にわかる（標本データから計算できる）．

そこで**母分散未知**の場合には：

- 方針1：$U^2$を$\sigma^2$の近似値（推定値）として利用．
  - $U^2$は$\sigma^2$の（不偏）推定量ですからね．
  - 「近似」を認めてしまえば，またしても正規分布の問題に帰着．推定の方法はほとんど同じ．

    （Uの値を$\sigma$のところに代入するだけ．同じ公式が使える）
  - 標本サイズが大きければ，良い（誤差の少ない）近似値であることが期待できる．
  - だが**小標本の場合**は誤差が無視できないはず．

    →方針2へ



S. TOKUNAGA

# Ⅳ．母平均の区間推定（母分散未知）

＊＊＊ここからまったく新しい内容＊＊＊

- 方針2：$\sigma^2$を用いずに表せる($U^2$を含む)統計量を導入する．

→第11章Ⅴ

3−その他の重要な標本分布[2]　t分布

以下の定理を利用：

定理(教科書p.100)

正規母集団$N(\mu,\ \sigma^2)$からの，大きさ $n$ の無作為標本 $\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ について，標本平均X’，不偏分散を $U^2$とする．このとき，確率変数

$$T := (X' - \mu)/(U/\sqrt{n})$$

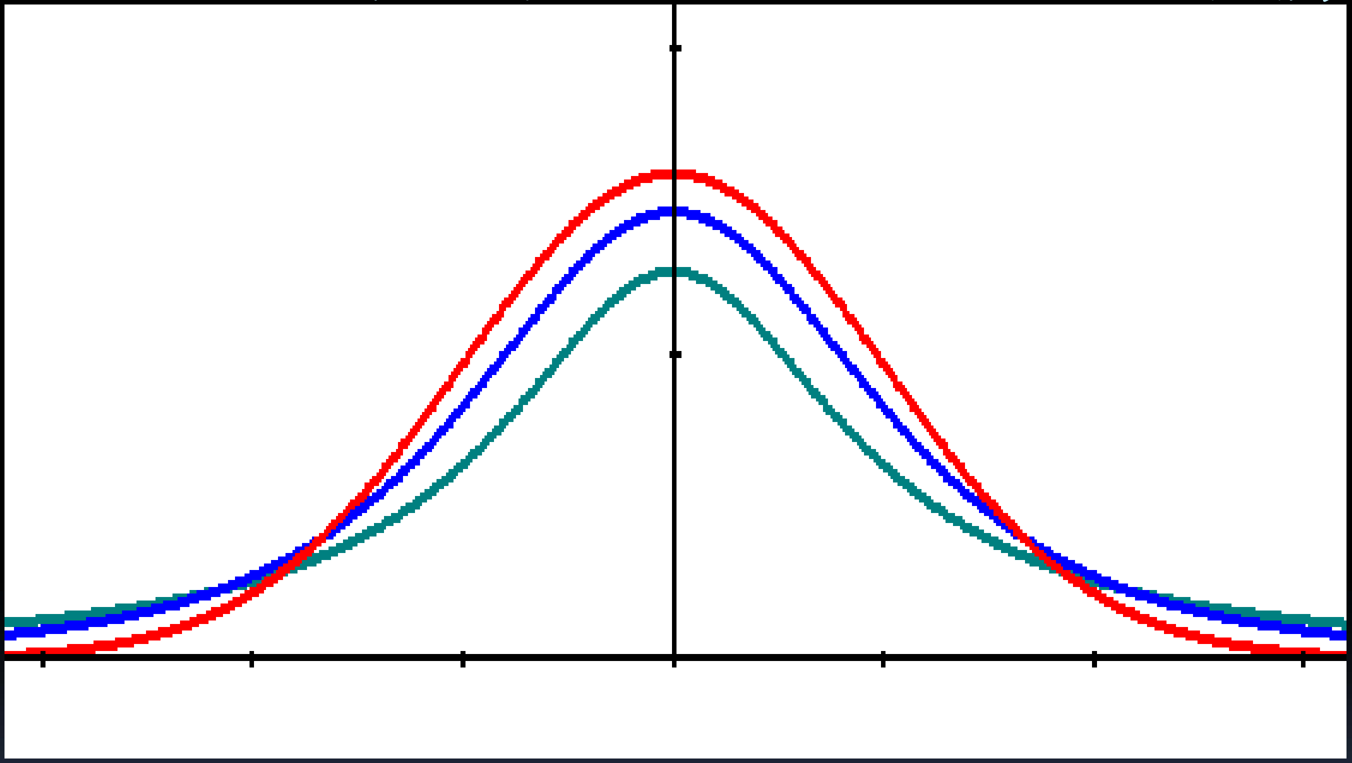
は自由度n−1の t分布(と呼ばれる分布)に従う．



S. TOKUNAGA

# t 分布の密度関数のグラフ

（明星大学 船津好明先生のウェブサイトより転載）



青：自由度3，暗緑：自由度1（赤：標準正規分布）



S. TOKUNAGA

# Ⅳ．母平均の区間推定（母分散未知）

## t分布について

- 「スチューデントのt分布」とも呼ばれる．
  - 「スチューデントstudent」は発案者のペンネーム．
  - 定理中の $T=(X'-\mu)/(U/\sqrt{n})$ はスチューデント比とも呼ばれる．
- 厳密に定義するのは少々やっかいなので省略．ともかく理論的に「わかっている」分布として（巻末の数表などを用いて）利用する．
- 密度関数の概形は正規分布と似ている．対称性のある釣鐘型．
- 自由度と呼ばれるパラメータを持つ．
  - サイズnの標本から求めたスチューデント比Tにおいては，自由度 $\nu$（ギリシャ文字の「ニュー」）$=n-1$．
  - 自由度とは大雑把に言えば「独立なパラメータの個数」．
  - $\nu$ 大きいほど標準正規分布N(0,1)に近づき，$\nu=\infty$ で完全に一致．
  - 自由度 $\nu$ のt分布の上側100 $\alpha$ %点を $t_\nu(\alpha)$ または $t(\nu,\alpha)$ で表す．
  - $t_\nu(\alpha)$ の値は教科書p.137の表から．



S. TOKUNAGA

# Ⅳ. 母平均の区間推定（母分散未知）

## 注意と補足

- 「正規母集団」の仮定はt分布を利用する上で本質的に重要.
- 標本平均X’の標準化変数:

  Z＝(X’－μ)／(σ／√n) との類似に注意.

  - つまりnが大きければ，T≒Zであるということ.

    （ただし，今考えているのはnが小さいケースでした）



S. TOKUNAGA

# Ⅳ. 母平均の区間推定（母分散未知）

## t分布を利用した$\mu$の推定

- 母分散$\sigma^2$が未知の正規母集団 N($\mu$, $\sigma^2$)からの，大きさ n の無作為標本{$x_1$,$x_2$, ・・・,$x_n$}について，標本平均x’，不偏分散を$U^2$とする．

このとき

$$t = (x' - \mu)/(U/\sqrt{n}) \sim （自由度n-1のt分布）$$

だから

- 母平均$\mu$の信頼度$\gamma = 1 - \alpha$の信頼区間は

$$\left( x' - t_{n-1}(\alpha/2)\, U/\sqrt{n},\ x' + t_{n-1}(\alpha/2)\, U/\sqrt{n} \right)$$

【注意】やってることは母分散既知の場合と大差ない．自由度という新たなパラメータが出てきただけ．

［RECALL］母分散既知の場合の$\mu$の100(1−$\alpha$)%信頼区間：

$$\left( \bar{X} - z(\alpha/2)\, \sigma/\sqrt{n},\ \bar{X} + z(\alpha/2)\, \sigma/\sqrt{n} \right)$$



S. TOKUNAGA

# Ⅳ. 母平均の区間推定（母分散未知）

例題2（教科書p.108）

- 母集団：成人女性HDLコレステロール値
  （正規母集団はp.106で仮定）
- 標本サイズn＝10，標本平均x’＝70
- 標本の不偏分散$U^2$＝14×14×（10/9）・・・★
  （「標準偏差」の定義に注意！）
- 信頼度＝0.95

［解答］

自由度＝n－1＝10－1＝9

教科書p.137の表より $t_9(0.025)=2.262$ を読み取る.

95%信頼区間は

$$\left( x' - t_{n-1}(0.025)\,U/\sqrt{n},\ x' + t_{n-1}(0.025)\,U/\sqrt{n} \right)$$

に該当する値を代入して

＝（　　　　，　　　　）



S. TOKUNAGA

# VI. 母比率の区間推定

## 「母集団比率に関する推測」とは

- ベルヌーイ母集団に関する推測.
  - 2項分布の応用.
  - ある程度大きな標本を扱うケースがほとんどなので，たいていは「2項分布の正規近似」を利用する.
- 「世論調査の類」．支持率調査など，身近に興味深い例が多い.
  - 「統計的な理解を深めるよいチャンス」.

# VI. 母比率の区間推定

2項分布の正規近似RECALL

中心極限定理により，nが十分大きいとき，

B(n,p)はN(np, np(1−p))で近似できる.

∵ B(n,p)に従う確率変数は，B(1,p)(という同一の分布)に従う独立なn個の確率変数の和と見なせるから.

- 従って，標本比率P＝X/nの分布も，

  正規分布 N(p, p(1−p)/n) で近似できる.
- さらにPの標準化変数：

$$Z = (P-p) / \sqrt{p(1-p)/n}$$

  は近似的に標準正規分布に従う.
- 分布が決まれば，あとはこれまでと同じ考え方で進めればよいはず(？)



S. TOKUNAGA

# VI. 母比率の区間推定

とりあえずやってみる.

（以下母比率をp，標本比率P＝X/n の実現値を$P_0$とする）

$$Z = (P-p)/\sqrt{p(1-p)/n}$$

が近似的に標準正規分布に従うので

$$P\left(-z(\alpha/2) \leqq (P_0-p)/\sqrt{p(1-p)/n} \leqq z(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

左辺のカッコ内を同値変形すると

$$P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{p(1-p)/n} \leqq p \leqq P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{p(1-p)/n}$$

すなわち、区間：

$$\left(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{p(1-p)/n},\ P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{p(1-p)/n}\right) \quad \cdots (*)$$

に母比率pが含まれる確率が$1-\alpha$.

ところが（＊）は未知数である p そのものを含んでいるので、これをそのまま信頼区間とすることはできない！

そこで・・・



S. TOKUNAGA

# VI. 母比率の区間推定

推定を行う際は,

$$\left(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{(p(1-p)/n)},\ P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{(p(1-p)/n)}\right)$$

においてpを近似値(推定値) $P_0$で置き換える.

すなわち信頼度$\gamma=1-\alpha$の信頼区間は:

$$\left(P_0 - z(\alpha/2)\sqrt{(P_0(1-P_0)/n)},\ P_0 + z(\alpha/2)\sqrt{(P_0(1-P_0)/n)}\right)$$

★ただし, 誤差の最大値を見積もりたいときはp=0.5 を採用.

- p(1－p)はp=0.5のとき最大値0.25を取ることに注意（2次関数のグラフを思い出せ！）.
- 「誤差の最大値を見積もりたいとき」の例:
  →誤差が一定値以下となるような標本サイズを決定する問題など.
  （標本サイズを決定する時点では$P_0$の値は得られていない！）

★(14章でやる)「母比率の検定」との違いに注意！



S. TOKUNAGA

# 第13章　推定

Ⅰ．　母集団と標本

Ⅱ．　点推定

- 不偏性，不偏推定量

Ⅲ．　区間推定

Ⅳ．　母平均の区間推定

1. 母分散が既知のとき・・・今回ここから
2. 母分散が未知のとき

Ⅴ．　母分散の区間推定・・・省略

Ⅵ．　母比率の区間推定

＊＊＊今回ここまで＊＊＊