統計（医療統計）

前期・第５回　確率変数と確率分布（３）

授業担当:徳永伸一

東京医科歯科大学教養部　数学講座

もういちど Overview

- 確率（9章：6ページ）・・・第1回授業
- 記述統計（10章： 4 ページ）・・・第2回授業

確率モデル（11章:18ページ）・・・第3回～

- 推測統計（13章:7ページ, 14章:15ページ）
  - 推定（点推定、区間推定）
  - 仮説検定

（注:前期は推測統計のさわりまで）

第11章　確率変数と確率分布

Ⅰ．確率変数と確率分布の定義

Ⅱ．確率変数の特性値

- 期待値（平均），分散など
- 期待値と分散の性質
- 確率変数の標準化　　・・・前回ここから

Ⅲ．確率変数の独立性

Ⅳ．代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など・・・前回ここまで

Ⅴ．中心極限定理と正規近似・・・今回ここから

Ⅵ．標本分布

[復習]　Ⅱ．確率変数の特性値 の続き

3-確率変数の標準化

期待値・分散の性質の簡単(だが重要)な応用です．

なのでもう一度復習：

確率変数 X と定数 a, b に対し，

期待値(平均)Eの性質：

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

分散の性質：

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

が常に成り立つ．

[復習]　Ⅱ．確率変数の特性値 の続き

確率変数の標準化

$E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$ のとき

$$E(X-\mu)=0$$

$$V(X-\mu)=\sigma^2$$

さらに $Z=(X-\mu)/\sigma$ とおけば

$$E(Z)=E((X-\mu)/\sigma)=0$$

$$V(Z)=V((X-\mu)/\sigma)=1$$

XからZへの変換を標準化変換,

ZをXの標準化変数という.

第11章　確率変数と確率分布

Ⅰ．確率変数と確率分布の定義

Ⅱ．確率変数の特性値

- 期待値（平均），分散など
- 期待値と分散の性質
- 確率変数の標準化　　・・・ここまで終わった

Ⅲ．確率変数の独立性　　・・・次ここ

Ⅳ．代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など

Ⅴ．中心極限定理と正規近似

Ⅵ．標本分布

［復習］ Ⅲ.確率変数の独立性（1）

まず（確率変数ではなくて）事象の独立性
について再確認

［RECALL］
２つの事象A, Bの独立性は
「AとBが独立」$\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
と定義された.
これは
「AとBの成否が互いにもう一方の影響を受けない」
という状態を表していた.

[復習]　Ⅲ.確率変数の独立性（2）

では2つの確率変数X, Yの独立性はどのように定義すればよいだろうか？

すなわち
確率変数X, Yが
「互いにもう一方の影響を受けない」
とはどういうことか？

これを数式を使ってきちんと(明確に)表したい.

［復習］　Ⅲ.確率変数の独立性（3）

離散型確率変数の場合

『X, Yのとり得るすべての値x, yについて

事象「X=x」と事象「Y=y」が独立』

ならば「XとYは独立」としよう.

すなわち言い換えると:

［定義］

X, Y: 離散型確率変数 のとき

『X, Yのとり得るすべての値x, yについて

$P(X=x$ かつ $Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$』

ならば「XとYは独立」という.

[復習]　Ⅲ.確率変数の独立性（4）

しかし！

この定義を連続型確率変数の場合にそのまま当てはめることはできない.

なぜなら・・・

X, Yが連続型確率変数のとき

P(X=x かつ Y=y), P(X=x), P(Y=y)

はいずれも常に0なので,

P(X=x かつ Y=y)＝ P(X=x)P(Y=y)

は常に成り立つ！

そこで・・・

「値」ではなく「区間」で考える.

[復習]　Ⅲ.確率変数の独立性（5）

[定義]
確率変数X, Yについて
『任意の実数a,b,c,dに対し
事象「a≦X≦b」と事象「c≦Y≦d」が独立』,
すなわち
『任意の実数a,b,c,dに対し

P(a≦X≦b かつ c≦Y≦d)＝ P(a≦X≦b)P(c≦Y≦d)』

ならば「XとYは独立」という.

【注意1】「任意の」という条件は本質的.
【注意2】上の定義は離散的確率変数にも適用できる
.

[復習]　Ⅲ.確率変数の独立性（6）

2-独立な確率変数の性質

確率変数X, Yが互いに独立のとき

$$V(X\pm Y) = V(X)+V(Y)$$

が成り立つ．

★左辺が＋でなく±となっていることに注意.

- $V(X-Y)=V(X+(-Y))=V(X)+V(-Y)=V(X)+(-1)^2V(Y)$

さらに一般には,

互いに独立な確率変数 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ と

任意の定数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 対し

$$V\left(\sum a_iX_i\right) = \sum a_i^2V(X_i)$$

が成り立つ（分散の加法性）．

［復習］　Ⅲ.確率変数の独立性（7）

つまり

Z_n：サイコロをn回振ったときの目の和

としたとき，

$$V(Z_n) = n \times (35/12)$$

が成り立つのは，

「k回目に振ったのサイコロの目」により定まる
確率変数X_kが 互いに独立 で，分散の加法性：

$$V(Z_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

が成り立つからでした！

<u>その他の性質</u>

X，Yが互いに独立のとき

$$E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$$

も成り立っている（この授業では使う機会がないが）．

[復習] 余談

「確率変数と事

というのは毎年さん

試験で

「2つの確率

こと

という問題を出すと

P(X∩

と答案に書く人が

(「P(X)とかP(Y)って何よ？

これをやると，まず不合格です．

（いわゆる「地雷を踏んだ」状態）

第11章　確率変数と確率分布

Ⅰ．確率変数と確率分布の定義

Ⅱ．確率変数の特性値

- 期待値（平均），分散など
- 期待値と分散の性質
- 確率変数の標準化

Ⅲ．確率変数の独立性・・・ここまで終わった

Ⅳ．代表的な確率分布・・・次ここ

- 2項分布，正規分布など

Ⅴ．中心極限定理と正規近似

Ⅵ．標本分布

[復習]　Ⅳ.代表的な確率分布（0）

このセクションに出てくる確率分布

離散型確率分布：

- 2項分布
- ポアソン分布

連続型確率分布：

- 正規分布

後で学ぶもの（「Ⅵ.標本分布」および13章以降）

- χ^2分布, t分布, F分布（いずれも連続型）

[復習] Ⅳ.代表的な確率分布（1）

1- 2項分布

まず準備として，ベルヌーイ(Bernoulli)試行の概念を導入する．

ベルヌーイ試行(独立試行)の定義：

以下の3条件を満たす試行をベルヌーイ試行という．

1. 各試行において，A(成功)とA^c(失敗)の2通りの結果のみ起こる．
2. 各試行において，P(A)＝pは一定．
3. 各試行(の結果となる事象)は互いに独立．

[復習]　Ⅳ.代表的な確率分布（2）

2項分布の定義：

1回ごとのA（成功）の確率が p であるような n 回のベルヌーイ試行において，n 回中A（成功）が起こる回数を X とすると

$$P(X=x) = {}_nC_x \cdot p^x \cdot (1-p)^{(n-x)}$$

となる.

この式で表される（離散型）確率分布を

二項分布 binomial distribution といい，

記号B（n,p）で表す.

また確率変数XがB（n,p）に従うとき，

$$X \sim B(n,p)$$

と書く.

[復習]　Ⅳ.代表的な確率分布（3）

2項分布B(n,p)に従う確率変数Xは,
B(1,p)に従うn個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$
の和とみなすこともできる.

ここで, 各X_iについて期待値と分散は

$$E(X_i) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$V(X_i) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)$$

よって期待値および分散の加法性より

$$E(X) = nE(X_i) = np$$

$$V(X) = nV(X_i) = np(1-p)$$

[復習]　Ⅳ.代表的な確率分布（5）

2- ポアソン分布

[定義]確率変数Xの分布が

$$f(X) = P(X=x) = e^{-\lambda} \lambda^{x} / x!$$

で表されるとき、Xの分布をポアソン分布Poisson distributionといい、*Po*(λ)で表す。

ポアソン分布の期待値と分散:

Xがポアソン分布*Po*(λ)に従うとき、

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

［復習］ Ⅳ.代表的な確率分布（6）

3-正規分布normal distribution

- もっとも重要かつ役に立つ分布．単に「連続型確率分布の代表例」というだけではない．
- 後述の「中心極限定理」により，他の確率分布の問題も正規分布で近似して解決できるケースが少なくない．
- 別名ガウス分布．

[復習] Ⅳ.代表的な確率分布（7）

- 正規分布の密度関数:

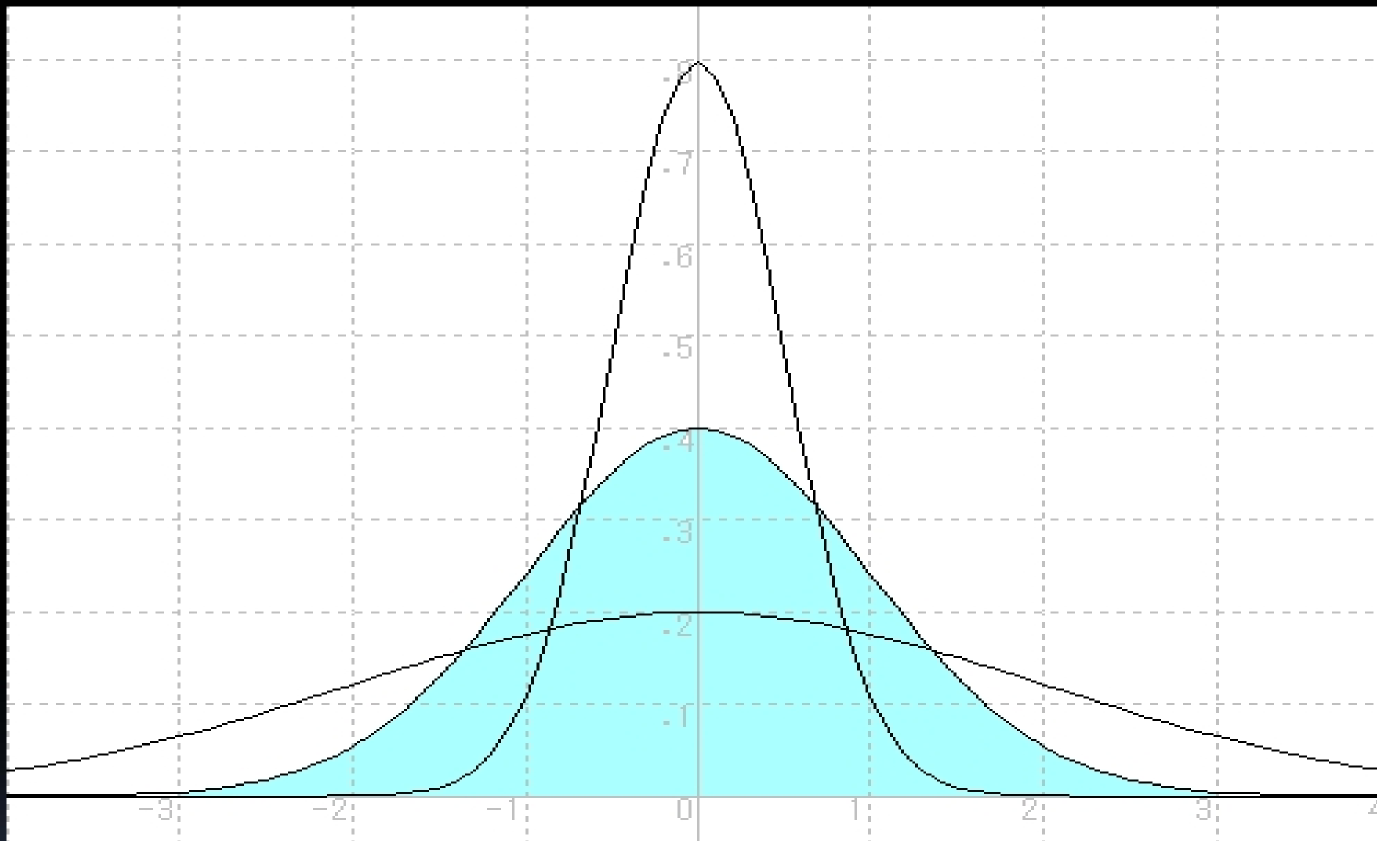
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ここで, μ は期待値, σ^2は分散となっている.

- 期待値 μ , 分散 σ^2の正規分布を N(μ , σ^2)で表す.
- Xが N(μ , σ^2)に従うとき, X～N(μ , σ^2)と書く.
- N(0, 1)を標準正規分布という.

[復習]　Ⅳ.代表的な確率分布（8）

- N(0, 1)，N(0, 2)，N(0, 0.5)の密度関数のグラフ:



(1)直線 x ＝μ (＝0)に関して対称.

(2)x ＝μ (＝0)で最大値$1/\sqrt{(2\pi\sigma^2)}$をとり，x ＝±∞で0.

（★分散が大きいほど，「山」は低くなり「裾野」が広がる）

(3)x ＝±σで変曲点.

[復習]　Ⅳ.代表的な確率分布（9）

[1]正規分布の線形変換と標準化

Xが正規分布に従うとき，その線形変換

（Y＝aX+bの形の変換）も正規分布に従う.

したがって，

X～ $N(\mu, \sigma^2)$ のとき

Xの標準化変数 $Z=(X-\mu)/\sigma$

は 標準正規分布N(0,1) に従う.

［復習］ Ⅳ.代表的な確率分布（10）

Xの区間と確率の関係（教科書p.94図11-5参照）

$P(\mu-\sigma \leqq X \leqq \mu+\sigma) = P(-1 \leqq Z \leqq 1) = 0.6827$

$P(\mu-2\sigma \leqq X \leqq \mu+2\sigma) = P(-2 \leqq Z \leqq 2) = 0.9545$

$P(\mu-3\sigma \leqq X \leqq \mu+3\sigma) = P(-3 \leqq Z \leqq 3) = 0.9973$

★教科書p.135付表1で値を確認せよ.

（試験でこの表を使用するので慣れておく必要あり）

$P(\mu-1.645\sigma \leqq X \leqq \mu+1.645\sigma)$

$= P(-1.645 \leqq Z \leqq 1.645) = 0.900$

$P(\mu-1.96\sigma \leqq X \leqq \mu+1.96\sigma)$

$= P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.950$

（特に最後の2つはよく用いられる値）

★教科書p.135付表1, p.136付表2で値を確認せよ.

［復習］ Ⅳ.代表的な確率分布（11）

[2]正規分布の再生性

確率変数X_1, X_2が互いに独立で、それぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma^2_1)$, $N(\mu_2, \sigma^2_2)$に従うとき，和X_1+X_2は

$$\text{正規分布}N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma^2_1+\sigma^2_2)$$

に従う.

注意：

$$E(X_1+X_2)=\mu_1+\mu_2,\quad V(X_1+X_2)=\sigma^2_1+\sigma^2_2$$

はそれぞれ「期待値の加法性」「分散の加法性」から導けるので，

「和をとっても正規分布」

という部分のみ本質的.

第11章　確率変数と確率分布

Ⅰ．確率変数と確率分布の定義

Ⅱ．確率変数の特性値

- 期待値（平均），分散など
- 期待値と分散の性質
- 確率変数の標準化

Ⅲ．確率変数の独立性

Ⅳ．代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など・・・ここまで終わった

Ⅴ．中心極限定理と正規近似・・・次ここ

Ⅵ．標本分布

Ⅴ.中心極限定理と正規近似（1）

中心極限定理1

[仮定] $X_1, X_2, \cdots, X_n$が

（任意の！）同じ分布に従う独立な確率変数

ならば,

[結論] $n \to \infty$のとき,

和$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$の分布は

正規分布に収束する！

Ⅴ.中心極限定理と正規近似（2）

中心極限定理2（言い換え）

「互いに独立な確率変数$X_1, X_2, \cdots, X_n$の分布が同一で，

$$E(X_k) = \mu,\ V(X_k) = \sigma^2 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

であるとき，nが十分大きければ，和 $\sum X_k$ の分布は $N(n\mu, n\sigma^2)$ にで近似できる」

【注意】仮定すべき条件は独立性と同一分布性のみ．元の分布は任意．

V.中心極限定理と正規近似（3）

<u>二項分布の正規近似</u>

中心極限定理により，nが十分大きいとき，

B(n,p)はN(np, np(1−p))で近似できる.

よって標準化変数

$$Z = (X - E(X)) / \sqrt{V(X)}$$

$$= (X - np) / \sqrt{(np(1-p))}$$

は近似的にN(0,1)に従う.

∵ B(n,p)に従う確率変数は，B(1,p)に従う 独立な n個の確率変数の和と見なせるから.

平成16年度試験問題より

<u>問題文</u>

「野球における打率とは、安打(ヒット)数を打数で割ったものである。イチロー選手は今シーズン、9月27日までに673打数251安打の成績を残している。」

「残り7試合で30打数あるとし、これまでと同じ打率でヒットを打ち続けるとすると、1シーズン257安打の大リーグ記録を樹立する(あと6本以上ヒットを打つ)確率はいくらか。」

「2項分布の正規近似を利用して計算せよ。」

考え方

- 「これまでと同じ打率」＝251/673≒0.373
- X:残り30打数の安打数とすれば

$$X \sim B(30, 0.373)$$

よって

- 期待値 $\mu = E(X) = 30 \times 0.373 \fallingdotseq 11.2$
- 分散 $V(X) = 30 \times 0.373 \times 0.627 \fallingdotseq 7.0$

すなわち

- $X \sim N(11.2,\ 7.0)$ と近似できる。
- 標準化変数 $Z = (X - 11.2)/\sqrt{7.0}$

より

$$P(X \geqq 6) \fallingdotseq P(Z \geqq (6 - 11.2)/\sqrt{7.0}) = \cdots$$

と計算.

Ⅴ.中心極限定理と正規近似（4）

半整数補正

- nが大きければかなり良い近似であると思われるが，nが小さいときはどのくらい誤差が出るのだろうか？
  - p.97問題10のケースで厳密値と正規近似の値を比較せよ．

- nが小さいときに少しでも誤差を減らす方法はないか？

⇒X～B(n,p)とする．整数 a, b に対し P(a≦X≦b) を正規近似で求める際，P(a−0.5≦X≦b+0.5) と補正して計算した方が誤差が減る．この補正を「不連続補正」ないし「半整数補正」といい，特にnが小さいときに効果的．

  - 区間を広げる方向に0.5ずらす(教科書p.97図11-7で確認)．
  - 再びp.97問題10で誤差の減少を確認．

第11章　確率変数と確率分布

Ⅰ．確率変数と確率分布の定義

Ⅱ．確率変数の特性値

1-期待値と分散・標準偏差の定義

2-確率変数の期待値と分散の性質

3-確率変数の標準化

Ⅲ．確率変数の独立

Ⅳ．代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など

Ⅴ．中心極限定理と正規近似　←ここまできた

Ⅵ．標本分布　←次ここ

Ⅵ.標本分布（1）

1−母集団分布と標本分布

KEYWORDS：母集団⇔標本，無作為抽出，母集団分布，統計量，標本分布

★母集団から無作為抽出した個々のデータの値を確率変数をみなして，確率分布の理論を適用することができる！

2−標本平均の分布

- 個々の標本データの値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ はもちろん確率変数と見なすことができる．
- 標本平均 $\bar{X}$ も1つの確率変数とみなすことができる！

（一定の大きさの標本を繰り返し抽出し，その度に標本平均の値を計算すれば，「標本平均の分布」を観察することができる）．

よって･･･

Ⅵ.標本分布（2）

標本平均の期待値と分散・標準偏差

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を平均 μ，分散 σ^2 である母集団から無作為抽出した標本とするとき，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はそれぞれ，期待値 μ，分散 σ^2 の互いに独立な確率変数と見なせる．

よって標本平均 $\bar{X}$ について

$$E(\bar{X}) = \mu \times n \times (1/n) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma^2 \times n \times (1/n)^2 = \sigma^2/n$$

（期待値・分散の加法性↑）　　（↑積に関するE,Vの性質より）

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{(\sigma^2/n)} = \sigma/\sqrt{n}$$

S. TOKUNAGA

Ⅵ.標本分布（3）

正規母集団を仮定すると･･･

定理(正規分布の性質より)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ をN(μ , σ^2)に従う母集団から無作為抽出した標本とすると

- 和 $\Sigma X_k \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
- 標本平均 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

さらに $\bar{X}$ の標準化変数Zについて:

- $Z = (\bar{X} - \mu) / \sqrt{(\sigma^2/n)} \sim N(0,1)$

Ⅵ.標本分布（4）

さらに！

$$n \times \bar{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

であるから,

nが十分大きければ, 母集団分布が正規分布でなくても中心極限定理によって標本平均の分布を正規分布で近似できる！

注意:

- 同一分布性:同一の母集団から抽出したから
- 独立性:無作為抽出により保証される
- 正規分布に従う確率変数はnで割っても正規分布.

したがって・・・

Ⅵ.標本分布（5）

定理（中心極限定理の系）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を平均μ，分散σ^2である任意の母集団から無作為抽出した大きさnの標本とするとき，

標本平均$\bar{X}$の分布は，nが十分大きければ，正規分布$N(\mu, \sigma^2/n)$で近似できる．

さらに$\bar{X}$の標準化変数$Z = (\bar{X} - \mu)/\sqrt{(\sigma^2/n)}$は標準正規分布N(0,1)で近似できる．

【注意】母集団分布が任意でよいことにあらためて注目．これにより，（十分大きい標本さえ得られれば）未知の分布を持つ母集団の母平均を推定・検定する際，正規分布が利用できる！

標本平均の分布・まとめ（対比して再確認）

定理（正規分布の性質より）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を正規分布$N(\mu, \sigma^2)$に従う母集団から無作為抽出した標本とすると

$$\text{標本平均 } \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

定理（中心極限定理の系）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$を平均μ，分散σ^2である任意の母集団から無作為抽出した標本とするとき，

標本サイズnが十分大きければ，近似的に

$$\text{標本平均 } \bar{X} \sim N(\mu,\ \sigma^2/n)$$

となる．

★「3−その他の重要な標本分布」は後回し（後期に）．

S. TOKUNAGA

第11章 確率変数と確率分布

Ⅰ．確率変数と確率分布の定義

Ⅱ．確率変数の特性値

1-期待値と分散・標準偏差の定義

2-確率変数の期待値と分散の性質

3-確率変数の標準化

Ⅲ．確率変数の独立

Ⅳ．代表的な確率分布

- 2項分布，正規分布など

Ⅴ．中心極限定理と正規近似

Ⅵ．標本分布 ←ここまで終了

いよいよ13章 推定 へ